مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

جزوه آموزشی

هندسه ۱

دهم ریاضی

کار از استاد بابالویان

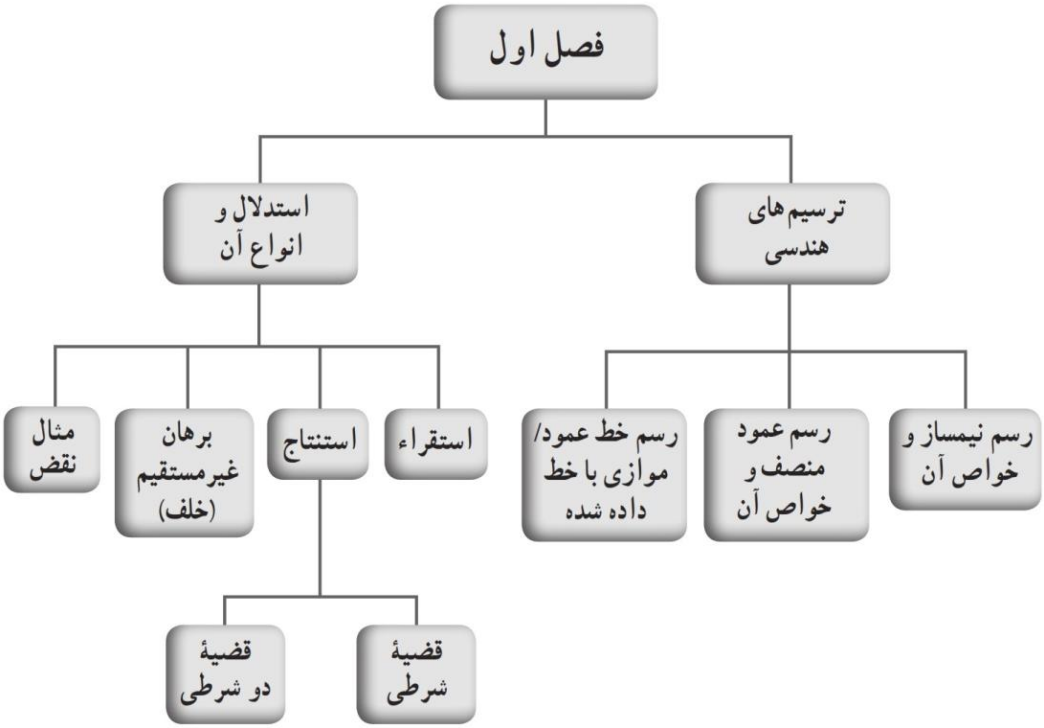
پاییز ۹۸

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

فصل اول

ترسیم هندسی و استدلال



درس اول : ترسیم های هندسی

فعالیت : نقطه ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید . ابتدا چند نقطه به فاصله ۲ از این نقطه مشخص کنید سپس به کمک خط کش و پرگار تمام نقاطی را بیابید که از این نقطه به فاصله ۲ است ؟

نتیجه : ..... مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابتی باشند .

تمرین : نقطه A به فاصله ۱ واحد از خط L قرار گرفته است . نقاطی روی خط L بیابید که از نقطه A به فاصله ۲ باشد .

تمرین : مثلثی با طول اضلاع ۲و۳ و۴ رسم کنید .

تمرین : متوازی الاضلاعی به طول قطر ۲و۴ رسم کنید . آیا این متوازی الاضلاع منحصر به فرد است ؟

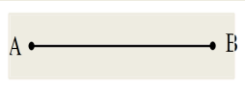
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : مستطیلی به طول قطر ۴ رسم کنید . آیا این مستطیل منحصر به فرد است ؟

تمرین : متوازی الاضلاعی به طول ضلع ۳و۵ و طول قطر ۶ رسم کنید . چرا شکل حاصل متوازی الاضلاع است ؟

فعالیت :

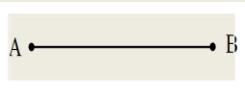
الف) پاره خط AB را در نظر بگیرید .



ب) دهانه پرگار را کمی بیشتر از نصف طول این پاره خط باز کنید

و از دو سر پاره خط کمان هایی بزنید .

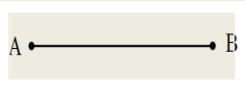
ج) محل برخورد دو کمان را C,D بنامید و با خط کش فاصله این نقاط را



از A,B بدست آورید . آیا برابرند ؟

د) دهانه پرگار را کمی بیشتر باز کرده و مراحل قبل را تکرار کنید . آیا نقطه

حاصل دوباره این خاصیت را دارد ؟



ه) به نظر شما اگر دهانه پرگار را به دفعات زیاد تغییر داده و نقاط جدیدی

را بدست آوریم ، همه این نقاط چه شکلی را ایجاد می کنند ؟

و) حدس شما در مورد رابطه این شکل با پاره خط رسم شده چیست ؟

ح) آیا این شکل را می توان فقط با همان دو نقطه اول ایجاد شده بدست آورد ؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

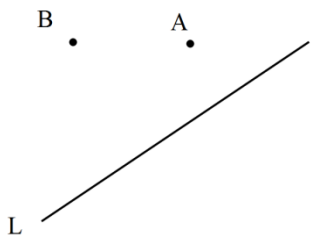
تمرین : طریقه رسم عمود منصف یک پاره خط را به طور کامل شرح دهید .

تمرین : ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است .

تمرین : ثابت کنید هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف پاره خط قرار دارد .

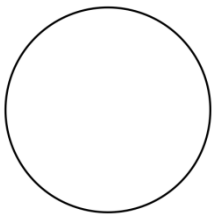
نتیجه : ..... مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که از دو سر پاره خط به فاصله یکسان باشند .

تمرین : نقطه ای از خط L را بیابید که از دو نقطه A,B به فاصله برابر باشد .



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : مرکز دایره زیر را بیابید .



تمرین : لوزی به طول قطر های ۲ و ۳ رسم کنید .

تمرین : مربعی به طول قطر ۲ رسم کنید .

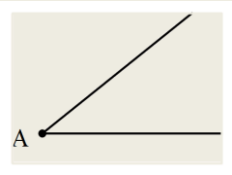
تمرین : از نقطه Aخارج خط L بر این خط عمودی رسم کنید و طریقه رسم را شرح دهید .

تمرین : از نقطه A خارج از خط L خطی موازی این خط رسم کنید و طریقه رسم را توضیح دهید .

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : مثلثی رسم کنید که طول دو ضلع آن ۲و۳ و طول ارتفاع وارد بر ضلع سوم ۱ باشد .

فعالیت :

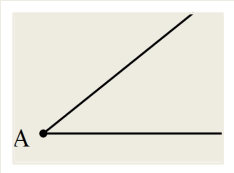


الف) زاویه مقابل را در نظر بگیرید .

ب) دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کرده و از راس A کمانی

بزنید تا نقاط B,C بدست بیاید .

ج) از نقاط B,C بدون تغییر اندازه دهانه پرگار ، کمان هایی بزنید

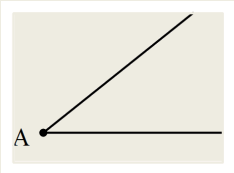


تا همدیگر را در D قطع کنند .

د) با خط کش فاصله نقطه D از اضلاع زاویه را حساب کنید. آیا برابرند ؟

ه) دهانه پرگار را تغییر داده و مراحل قبل را تکرار کنید . آیا نقطه

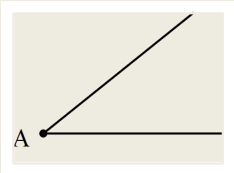
حاصل دوباره این خاصیت را دارد ؟



ز) به نظر شما اگر دهانه پرگار را به دفعات زیاد تغییر داده و نقاط جدیدی

را بدست آوریم ، همه این نقاط چه شکلی را ایجاد می کنند ؟

حدس شما در مورد رابطه این شکل با زاویه رسم شده چیست ؟



ح) آیا این شکل را می توان فقط با یک نقطه ایجاد شده و راس زاویه نیز بدست آورد ؟

تمرین : طریقه رسم نیمساز یک زاویه را به طور کامل شرح دهید .

تمرین : ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه باشد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است .

تمرین : ثابت کنید هر نقطه درون زاویه که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله باشد ، روی نمیساز آن زاویه قرار دارد .

نتیجه : ..... مجموعه نقاطی از صفحه است که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسانی هستند .

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

درس دوم : استدلال

گزاره : هر جمله خبری که ارزش دقیقاً درست یا نادرست داشته باشد .گرچه درست یا نادرست بودن آن برای ما مشخص نباشد.

مثال : عبارت « مجموع زاویه های داخلی مثلث ۹۰ درجه است » یک گزاره است ولی عبارت « آیا ۳ از ۲ بزرگ تر است ؟ » گزاره نیست .

نقیض گزاره : گزاره ای که ارزشی کاملاً مخالف ارزش گزاره اصلی را داشته باشد .

مثال : نقیض گزاره « هر مستطیلی یک متوازی الاضلاع است» گزاره « هیچ مستطیلی متوازی الاضلاع نیست» می باشد .

مثال نقض : مثالی که درستی یک حکم کلی را رد می کند .

مثال : برای حکم « تمام اعداد اول فرد هستند » می توان ۲ را یک مثال نقض دانست زیرا اول است ولی فرد نیست .

استدلال استقرایی : نتیجه گیری کلی بر پایه تعداد محدودی مشاهده . (از جزء به کل رسیدن)

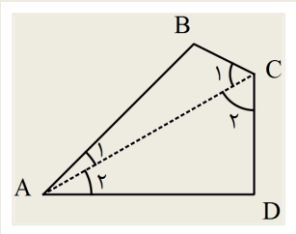
مثال : مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰ درجه است .

استدلال استقرایی : در چهار ضلعی های مربع ، مستطیل ، متوازی الاضلاع و لوزی زاویه های مجاور مکمل هم هستند پس به راحتی می توان نشان داد مجموع زاویه های داخلی آنها ۳۶۰ درجه است . پس مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است .

استدلال استنتاجی : نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت هایی که درستی آنها را پذیرفته ایم .

مثال : مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰ درجه است .

استدلال استنتاجی : می دانیم مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است با رسم یک چهار ضلعی محدب دلخواه و یک قطر از آن داریم :



$$\left.\begin{array}{l} A_۱ + C_۱ + B = ۱۸۰^\circ \\ A_۲ + C_۲ + D = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} (A_۱ + A_۲) + (C_۱ + C_۲) + B + D = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow A + C + B + D = ۳۶۰^\circ$$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

قضیه : نتایج کاملاً درستی که از استدلال استنتاجی بدست می آیند را قضیه می نامند .

قضیه شرطی : هر قضیه را می توان به صورت شرطی نوشت : **اگر « فرض » آنگاه « حکم »**

مثال : مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است .

به صورت شرطی : اگر مثلث داشته باشیم آنگاه مجموع زاویه داخلی آن ۱۸۰ درجه است .

عکس قضیه : اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم عکس قضیه بدست می آید .

مثال : مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است .

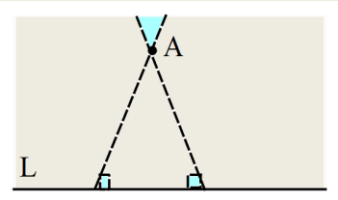
عکس قضیه : اگر مجموع زوایای داخلی یک چند ضلعی ۱۸۰ درجه باشد آنگاه آن چند ضلعی مثلث است .

قضیه دو شرطی : اگر عکس یک قضیه نیز درست باشد ، آن قضیه را دو شرطی می نامند و معمولاً به صورت زیر بیان می کنند :

« فرض » اگر و تنها اگر « حکم »

برهان خلف : نوعی استدلال در هندسه و ریاضیات که به جای شروع از فرض و رسیدن به حکم . ابتدا فرض می کنیم حکم درست نباشد و به یک تناقض با فرض و یا به یک امر غیر ممکن می ریم . بنابر این می پذیریم که حکم درست بوده است .

مثال : از هر نقطه خارج یک خط ، نمی توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد .



فرض می کنیم حکم غلط باشد یعنی بتوان دو عمود از A بر خط L رسم کرد

در این صورت مثلثی پدید می آید که مجموع زاویه های داخلی آن بیش از ۱۸۰ درجه است و چنین چیزی ممکن نیست . پس حکم نمی تواند غلط باشد .

تمرین : نقیض گزاره های زیر را بنویسید .

الف) $a > b$

ب) هیچ دو زاویه مکملی با هم برابر نیستند .

ج) عددی وجود دارد که مربعش کوچکتر از خودش است .

د) $x^{۲} = ۰$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : برای گزاره های زیر مثال نقض بیاورید .

الف) حاصل ضرب دو عدد گنگ عددی گنگ است .

ب) به ازای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^{۲}+n+۴۱$ عدد اول است .

ج) ارتفاع هر مثلث درون آن است .

د) هر چهار ضلعی که همه اضلاع آن برابر باشند مربع است .

تمرین : قضیه های زیر را به صورت شرطی نوشته سپس عکس آنها را بیان کنید .

الف) مساحت دو مثلث همنهشت با هم برابر هستند .

شرطی :

عکس قضیه :

ب) دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند .

شرطی :

عکس قضیه :

ج) در مثلث متساوی الاساقین زاویه مقابل به ساقها با هم برابرند .

شرطی :

عکس قضیه :

تمرین : عکس قضیه های زیر را نوشته و قضیه های زیر را به صورت دو شرطی بیان کنید .

الف) در مثلث متساوی الاساقین زاویه مقابل به ساقها با هم برابرند .

ب) در هر متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف می کنند .

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

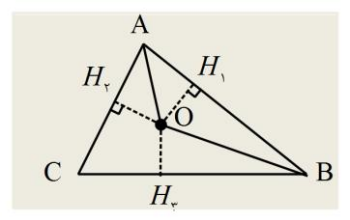
تمرین : با برهان خلف ثابت کنید ، خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند ، دیگری را نیز قطع خواهد کرد .

تمرین : با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

تمرین : با استدلال استنتاجی ثابت کنید در هر n ضلعی محدب مجموع زاویه های داخلی برابر است با $(n-۲)\times ۱۸۰$.

همرسی ها :

قضیه ۱ : نیمساز های داخلی هر مثلث همرسند .



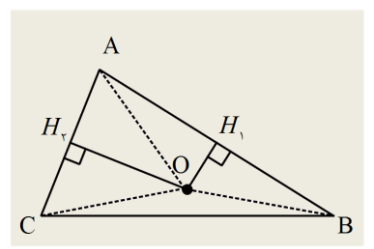
اثبات : نیمساز زاویه های A, B را رسم می کنیم و محل برخورد آنها را O می نامیم :

چون O روی نیمساز زاویه A است : ...=...

چون O روی نیمساز زاویه B است : ...=...

از دو رابطه قبل نتیجه می شود ...=... این یعنی O روی ..... نیز قرار دارد .

قضیه ۲ : عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرسند .



اثبات : عمود منصف اضلاع AB, AC را رسم می کنیم و محل برخورد آنها را O می نامیم :

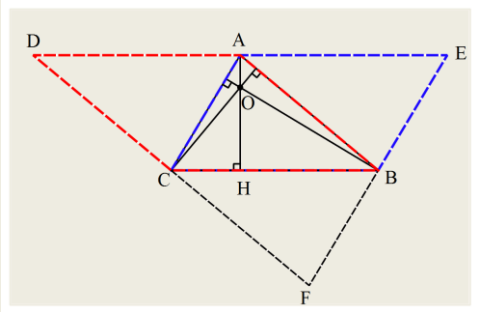
چون O روی عمود منصف AB است : ...=...

چون O روی عمود منصف AC است : ...=...

از دو رابطه قبل نتیجه می شود ...=... این یعنی O روی ..... نیز قرار دارد .

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

قضیه ۳ : ارتفاع های هر مثلث همرسند .



اثبات : از رئوس مثلث خطوطی موازی اضلاع مقابل آنها رسم می کنیم :

چهار ضلعی $AEBC$ متوازی الاضلاع است پس : $AE = \cdots$

چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است پس : $AD = \cdots$

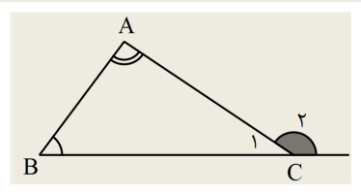
از روابط قبل نتیجه می شود $\cdots = \cdots$ پس AH پاره خط DE را ..... می کند .

از طرفی چون $AH \perp BC$ و $BC \parallel DE$ پس $\cdots \perp \cdots$

در نتیجه AH عمود منصف پاره خط DE است و به این ترتیب ارتفاع های دیگر مثلث ABC نیز عمود منصف های مثلث DEF هستند و چون ..... پس ارتفاع های مذکور همرسند .

نامساوی ها :

قضیه ۱ : در هر مثلث زاویه خارجی از هر زاویه داخلی غیر مجاور بزرگ تر است .



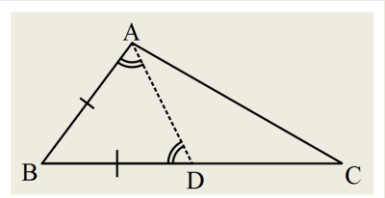
اثبات : می دانیم زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع زاویه های داخلی غیر مجاور است

پس .....

بنابر این می توان گفت $\widehat{C_۲}$ به تنهایی از هر زاویه داخلی غیر مجاور بزرگ تر است .

قضیه ۲ : در هر مثلث زاویه مقابل به ضلع بزرگ تر از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر ، بزرگتر است .

$$BC > AB \Rightarrow \widehat{A} > \widehat{C}$$



اثبات : روی ضلع BC به اندازه پاره خط AB جدا می کنیم :

مثلث ABD متساوی الساقین است پس $\widehat{D} = \cdots$

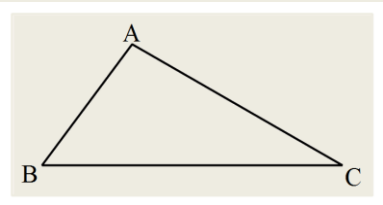
زاویه $\widehat{D}$ زاویه خارجی مثلث ADC است پس $\widehat{D} > \cdots$

از روابط قبل مشخص می شود $\cdots > \cdots$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

عکس قضیه ۲ : در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه کوچکتر ، بزرگ تر است .

$$\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow BC > AB$$



اثبات : فرض کنید $BC \not> AB$ پس ..... :

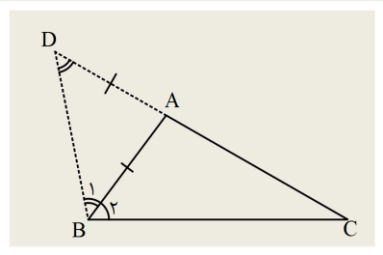
اگر $BC = AB$ آنگاه مثلث ..... است و $\cdots = \cdots$

اگر $BC < AB$ آنگاه طبق اصل قضیه $\cdots < \cdots$

پس در هر صورت به تناقض می رسیم لذا حکم نمی تواند غلط باشد .

قضیه ۳ : (قضیه نامساوی مثلثی) : مجموع هر دو ضلع مثلث از ضلع سوم بزرگ تر است .

$$AB + AC > BC$$



اثبات : ضلع AC را از راس A به اندازه ضلع AB امتداد می دهیم .

(دلیل این کار این است که سعی می کنیم دو ضلع AB, AC را تبدیل به یک ضلع کنیم

تا از قضیه های قبل برای اثبات بزرگ تر بودن یک ضلع از ضلع دیگر استفاده کنیم)

مثلث ABC متساوی الساقین است پس $\cdots = \cdots$ و این یعنی $\cdots > \cdots$

طبق قضیه اثبات شده ای $DC > \cdots$ بنابر این $\cdots + \cdots > \cdots$

چون $AD = AB$ پس $AB + AC > BC$.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

فصل دوم

قضیه تالس و تشابه

درس اول : نسبت و تناسب در هندسه

تناسب : یک تساوی از نسبت ها را تناسب می گویند . $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ویژگی های تناسب :

۱	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	b و $d\neq ۰$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	a و b و c و $d\neq ۰$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	a و b و c و $d\neq ۰$	(تعویض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	b و $d\neq ۰$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Rightarrow \frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	b و $d\neq ۰$	(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	b و $d\neq ۰$	

تمرین : اگر $\frac{۱}{y}=\frac{x-۱}{۲}=\frac{x}{۳}$ ، مقدار x,y را بیابید .

تمرین : اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ ، حاصل $x+y+z$ چقدر است ؟

تمرین : اگر $\frac{a}{a+b}=\frac{۳}{۵}$ ، حاصل $\frac{a+۳}{b+۲}$ چقدر است ؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{۲}{۵}$ ، حاصل $\frac{a+۳c+۴}{b+۳d+۱۰}$ را بیابید .

واسطه هندسی دو عدد : اگر در یک تناسب دو عدد طرفین یا دو عدد وسطین برابر باشند خواهیم داشت : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow b^{۲}=ac$

که b را واسطه هندسی دو عدد a,c می گویند .

تمرین : واسطه هندسی دو عدد ۲و ۸ را بیابید .

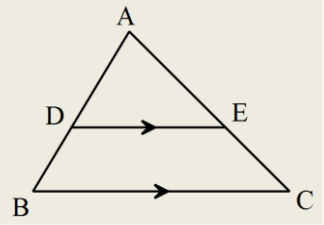
تمرین : واسطه هندسی اعداد $۴\sqrt{۳},۳\sqrt{۳}$ را محاسبه کنید .

درس دوم : قضیه تالس

تالس

تالس فیلسوف و دانشمند یونانی هم عصر با کوروش که او را آغازگر فلسفه و علم می دانند ، حدود ۲۶۰۰ سال پیش در شهر میلیتوس یونان به دنیا آمد . وی توانست خورشید گرفتگی سال ۵۸۵ قبل از میلاد را پیش بینی و همچنین ارتفاع اهرام مصر را اندازه گیری کرد.

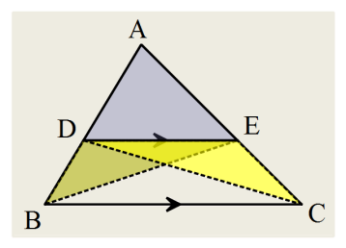
قضیه تالس : هرگاه خطی موازی با یکی از اضلاع مثلث ، دو ضلع دیگر را قطع کند روی آن دو ضلع پاره خط های متناسب ایجاد می کند .



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$ (رابطه جزء به جزء)

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

اثبات : پاره خط های DC, BE را رسم می کنیم :



درمثلث ADC به دلیل ..... داریم : $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEC}}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

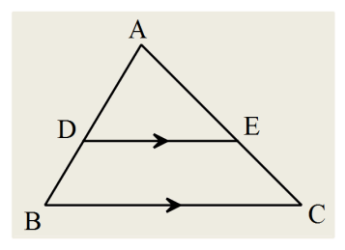
درمثلث ABE به دلیل ..... داریم : $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEB}}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

از طرفی به دلیل ..... داریم : $S_{\overset{\Delta}{DEC}} = \cdots\cdots$

از سه رابطه قبل نتیجه می شود : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

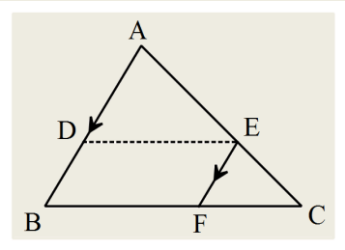
نتیجه : اگر در تناسب قضیه تالس ، ترکیب در مخرج انجام دهیم داریم : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (رابطه جزء به کل)

تعمیم قضیه تالس : اگر خطی موازی یکی اط اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند ، اضلاع مثلث بوجود آمده با اضلاع مثلث اصلی متناسب است .



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

اثبات : پاره خط EF را موازی AB رسم می کنیم :



از $DE \parallel BC$ طبق رابطه جز به جز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

از $EF \parallel AB$ طبق رابطه جز به جز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

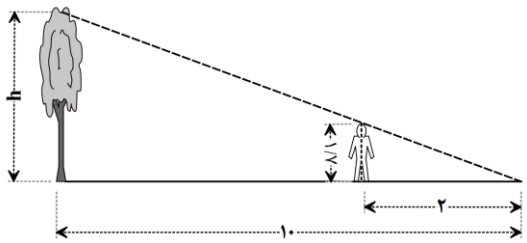
از دو تناسب قبل نتیجه می شود : $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

از آنجایی که چهار ضلعی $BDEF$ متوازی الاضلاع است پس $BF = \cdots$ در نتیجه تناسب قبل تبدیل می شود به : $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

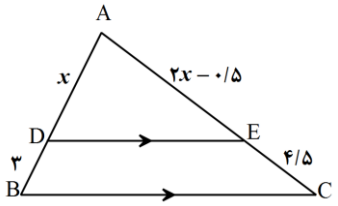
و طبق رابطه جز به کل و این تناسب خواهیم داشت : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

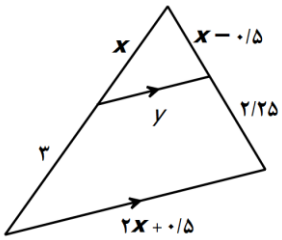
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مسأله : در یک زمان مشخص از ظهر سایه درختی ۱۰ متر و سایه شخصی ۲ متر است . اگر قد شخص ۱۷۰ سانتی متر باشد ، ارتفاع درخت چقدر است ؟ (شخص می تواند به اندازه ای به درخت نزدیک شود که انتهای سایه اش با انتهای سایه درخت منطبق شود)

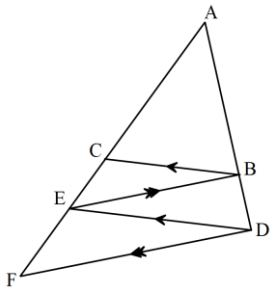


تمرین : مقدار x, y را در شکل های زیر بیابید .

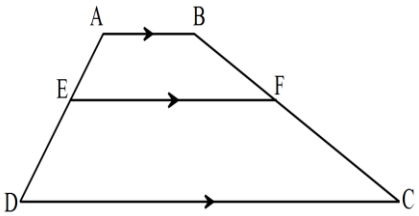




تمرین : در شکل زیر ثابت کنید $AE^{۲} = AC.AF$



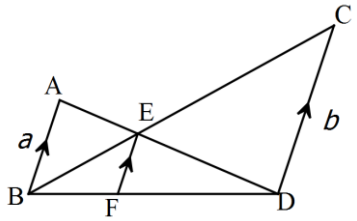
تمرین : ثابت کنید اگر خطی موازی قاعده های ذوزنقه دو ضلع دیگر را قطع کند روی آنها پاره خط های متناسب ایجاد می کند (قضیه تالس در ذوزنقه)



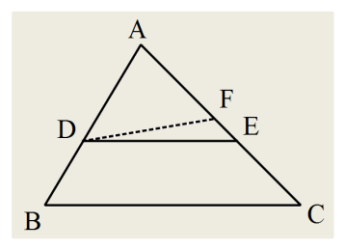
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : اگر سه خط مشخص شده موازی باشند . فرمولی بیابید که طول پاره خط EF را بر حسب طول دو پاره خط موازی آن بدهد .

(راهنمایی : دوبار رابطه تالس و مجموع این دو تناسب)



عکس قضیه تالس : اگر خطی دو ضلع مثلث را طوری قطع کند که روی آنها پاره خط های متناسب ایجاد کند ، این خط با ضلع سوم مثلث موازی است .



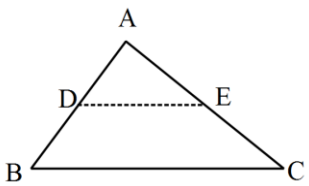
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow DE \parallel BC$$

اثبات : فرض کنید $DE \nparallel BC$ پس می توان از نقطه D پاره خط DF را موازی BC رسم کرد بنابر این طبق رابطه جز به کل داریم : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$

از رابطه جز به کل فرض قضیه نیز داریم : $\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}$

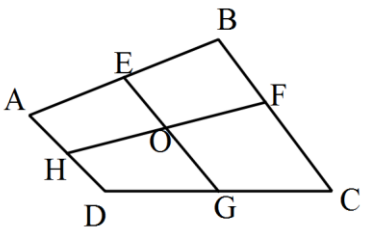
از رابطه های قبل نتیجه می شود که $\cdots=\cdots$ و این یعنی نقاط F,E یکی هستند پس $DE \parallel BC$

تمرین : ثابت کنید اگر وسط دو ضلع از مثلثی را به هم وصل کنیم پاره خط حاصل موازی ضلع سوم مثلث است .



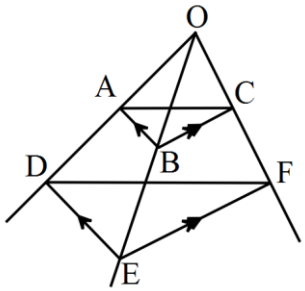
تمرین : ثابت کنید در هر چهار ضلعی دلخواه ، دو پاره خطی که وسط اضلاع مقابل را به هم وصل می کنند ، همدیگر را نصف می کنند

(راهنمایی : نشان چهار ضلعی EFGH متوازی الاضلاع است)



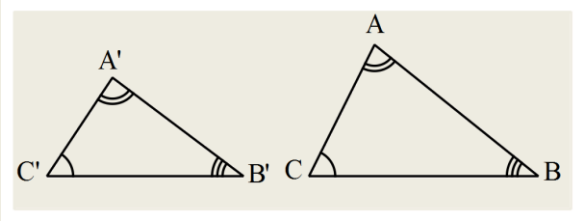
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : در شکل مقابل ثابت کنید $AC \parallel DF$.



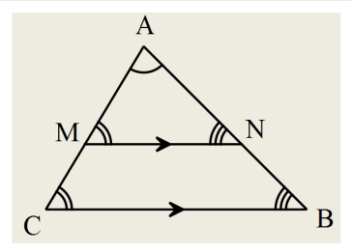
درس سوم : تشابه

دو مثلث متشابه : دو مثلث متشابه هستند اگر و تنها اگر زاویه های آنها برابر و اضلاع آنها متناسب باشند .



$$\hat{A}=\hat{A'},\hat{B}=\hat{B'},\hat{C}=\hat{C'} \quad , \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

قضیه اساسی تشابه : اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند ، مثلث بوجود امده با مثلث اصلی متشابه است .

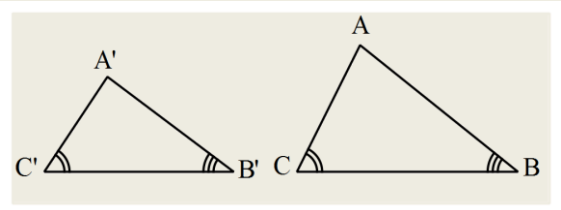


اثبات : زاویه A مشترک و زاویه های دیگر نیز طبق قضیه خطوط موازی برابرند .

از طرفی طبق رابطه تعمیم قضیه تالس نسبت اضلاع نیز برابرند .

حالت های تشابه دو مثلث :

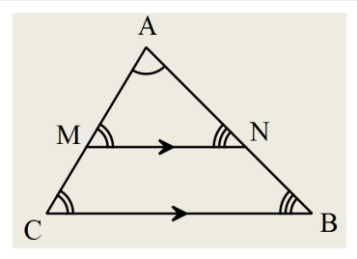
قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند ، دو مثلث متشابه هستند .



$$\hat{B}=\hat{B'},\hat{C}=\hat{C'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

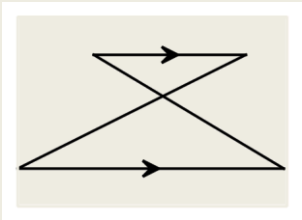
اثبات : روی اضلاع AB و AC اضلاع AN و AM را به ترتیب به اندازه $A'C', A'B'$ جدا می کنیم و مثلث AMN را تشکیل می دهیم .چون ..... و دو زاویه دیگر این دو مثلث برابرند ، پس $\widehat{A}=\widehat{A'}$



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ AM=A'C'\\ AN=A'B'\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\overset{\Delta}{A'B'C'}\cong \overset{\Delta}{AMN}}\Rightarrow \cdots\cdots=\cdots\cdots$$

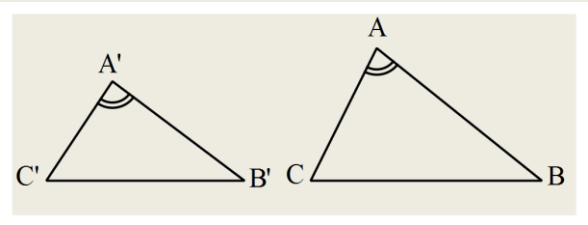
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots,\widehat{C'}=C\Rightarrow \widehat{M}=\widehat{C}\Rightarrow \boxed{\cdots\cdots \parallel \cdots\cdots}$$

در نتیجه طبق قضیه اساسی تشابه $\cdots\cdots\cdots\sim\cdots\cdots\cdots$ پس $\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$.



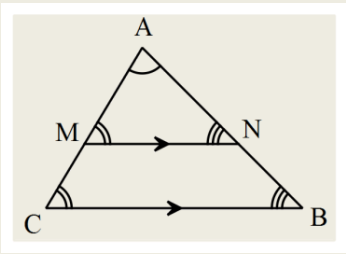
نتیجه : در شکلی به صورت مقابل همیشه دو مثلث متشابه هستند .

قضیه ۲ : هرگاه دوضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه بین آنها برابر باشند ، دو مثلث همنهشتند .



$$\widehat{A}=\widehat{A'},\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات : روی اضلاع AB و AC اضلاع AN و AM را به ترتیب به اندازه $A'C', A'B'$ جدا می کنیم و مثلث AMN را تشکیل می دهیم.



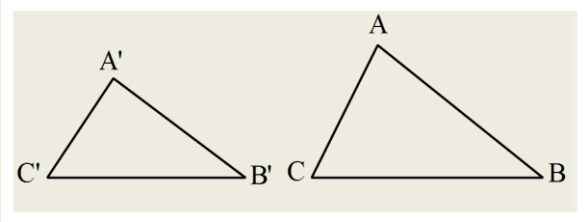
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ AM=A'C'\\ AN=A'B'\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\overset{\Delta}{A'B'C'}\cong \overset{\Delta}{AMN}}$$

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow \frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow \boxed{MN \parallel BC}$$

در نتیجه طبق قضیه اساسی تشابه $\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ پس $\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$.

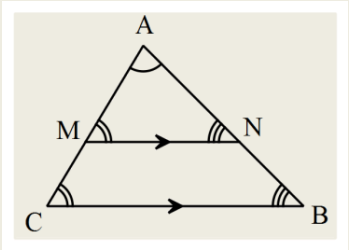
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

قضیه ۳ : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد ، دو مثلث متشابه هستند .



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات : روی اضلاع AB و AC اضلاع AN و AM را به ترتیب به اندازه $A'C', A'B'$ جدا می کنیم و مثلث AMN را تشکیل می دهیم .



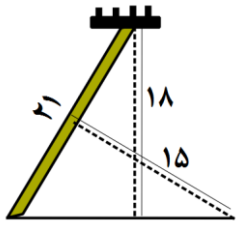
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}\Rightarrow \boxed{MN \parallel BC}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}\xrightarrow{AN=A'B'}\frac{A'B'}{AB}=\frac{MN}{BC}$$

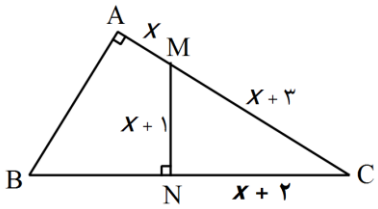
با مقایسه تناسب با فرض داریم ..... = ... در نتیجه $\boxed{\cdots\cdots\cdots\cong\cdots\cdots\cdots}$ و چون طبق قضیه اساسی تشابه $\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$

پس $\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$.

تمرین : در شکل زیر با عمود کردن الواری به طول ۱۵ متر می خواهیم تیرک در حال سقوط را ثابت کنیم . پای این الوار را در چه فاصله ای از پای تیرک قرار دهیم ؟

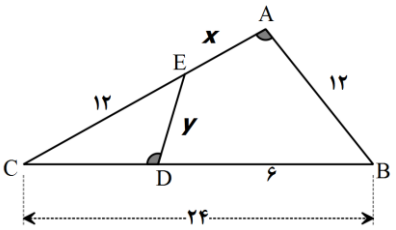


تمرین : مقدار x را بیابید .

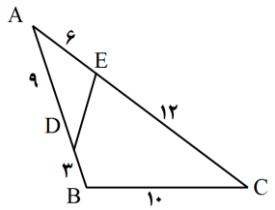


** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

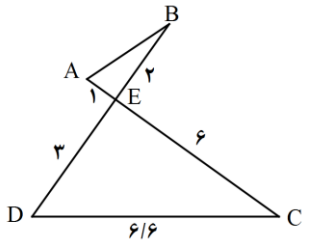
تمرین : در شکل زیر زاویه های مشخص شده برابرند . مقدار x, y را بیابید .



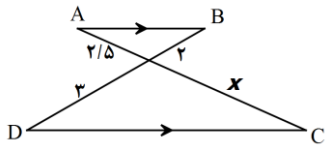
تمرین : در شکل های زیر مقدار x را بیابید .



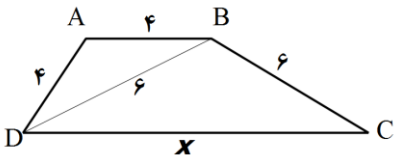
.....



.....

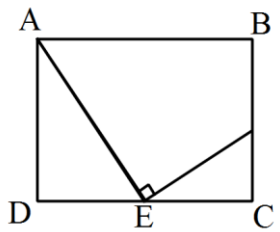


.....



تمرین : در مستطیل زیر E و F نقاط وسط اضلاع هستند . نسبت طول به عرض مستطیل را بیابید .

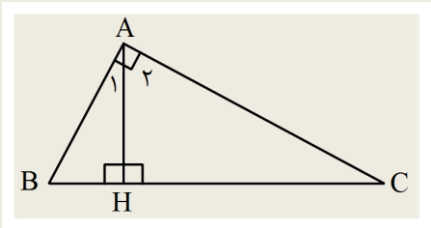
(راهنمایی : دو مثلث متشابه است ، اندازه اضلاع مستطیل را a و b گذاشته و نسبت تشابه را بنویسید)



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

قضیه : اگر در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم روابط زیر حاکم است .

الف) $AH^{۲} = BH \times CH$



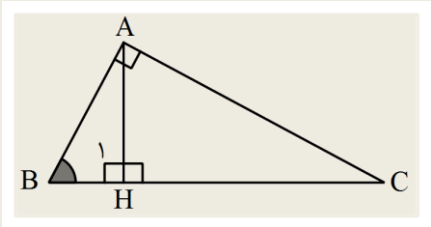
اثبات :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{A}_{۱}=۹۰\\ \hat{A}_{۲}+\hat{A}_{۱}=۹۰\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}+\hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲}+\hat{A}_{۱}\Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_{۲}$$

به همین ترتیب $\hat{C}=\hat{A}_{۱}$ در نتیجه دو مثلث .....و ..... بنا به حالت ..... متشابه هستند پس :

$$\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow AH^{۲}=BH\times CH$$

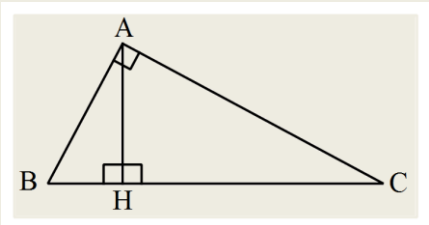
ب) $AB^{۲} = BH \times BC$ (همینطور $AC^{۲} = CH \times BC$)



اثبات :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{H}_{۱}=\hat{A}\end{array}\right\}\Rightarrow \cdots\cdots\sim\cdots\cdots\Rightarrow \frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots}{\cdots}\Rightarrow AB^{۲}=BH\times BC$$

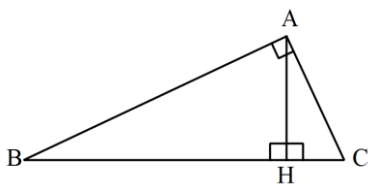
ج) $AH \times BC = AB \times AC$



اثبات :

$$\left.\begin{array}{l}S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times AH\times BC\\ S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\times\cdots\cdots\times\cdots\cdots\end{array}\right\}\Rightarrow AH\times BC=AB\times AC$$

تمرین : در شکل مقابل با فرض های داده شده ، طول ضلع خواسته شده را بیابید .



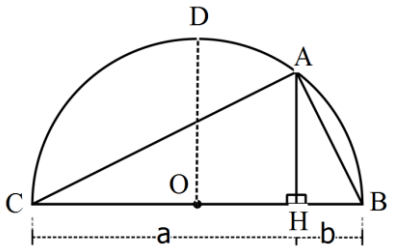
الف) $BH = ۹, CH = ۴, AH = ?$

ب) $AB = ۸, AC = ۶, BH = ?$

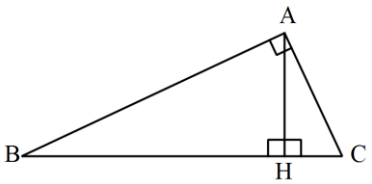
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : در یک مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر پاره خط هایی به طول ۶/۴ و ۳/۶ روی وتر ایجاد می کند . محیط مثلث را بیابید .

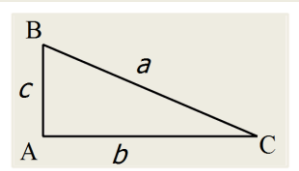
تمرین : با توجه به شکل داده شده ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a,b واسطه هندسی همواره کوچکتر یا مساوی واسطه حسابی است . یعنی همواره $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{۲}$. (راهنمایی : زاویه A قائمه است . چرا ؟)



تمرین : قضیه فیثاغورس را با استفاده از قضایای ارتفاع وارد بر وتر ثابت کنید .

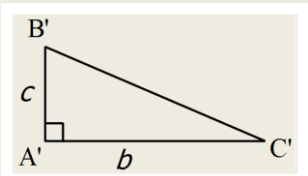


عکس قضیه فیثاغورس: اگر در مثلثی رابطه طول اضلاع $a^۲ = b^۲ + c^۲$ باشد ، آن مثلث در قائم الزاویه است .



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} = ۹۰^\circ$$

اثبات : دو پارخط به طول های b,c عمود بر هم رسم می کنیم و مثلث $A'B'C'$ را تشکیل می دهیم :



طبق رابطه رابطه فیثاغورس داریم : $B'C'^۲ = \cdots + \cdots$

و با مقایسه این رابطه با فرض قضیه داریم : $B'C'^۲ = \cdots$ پس $B'C' = \cdots$

در نتیجه طبق حالت ..... $A'B'C' \cong ABC$ هم نهشتند و $\widehat{A} = ۹۰$

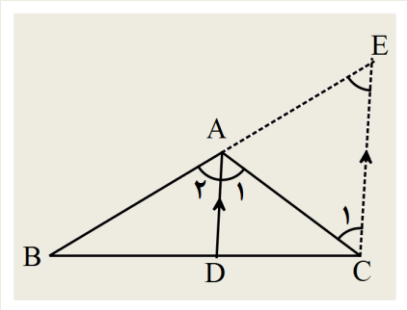
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

درس چهارم : کاربرد های قضیه تالس و تشابه

۱) قضیه نیمساز ها : در هر مثلث هر نیمساز زاویه داخلی ، ضلع قابل را به نسبت اضلاع زاویه قطع می کند .

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

اثبات به کمک قضیه تالس :



از راس C خطی موازی AD رسم می کنیم تا امتداد ABرا در E قطع کند :

طبق قضیه تالس داریم : $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

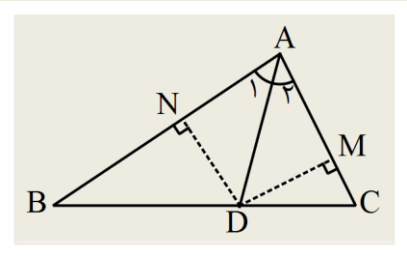
اگر برای خطوط موازی AC را مورب در نظر بگیریم داریم : ...=...

اگر برای خطوط موازی AE را مورب در نظر بگیریم داریم : ...=...

با توجه به اینکه $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ پس از روابط قبل نتیجه می شود که : ...=...

پس می توان با جایگذاری در تناسب به دست آمده به تساوی مقابل رسید : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

اثبات به کمک نسبت مساحت ها :



از نقطه D ارتفاع های وارد بر اضلاع AC و AB را رسم می کنیم :

DM=DN زیرا : .....

در نتیجه اگر AC و AB را را قاعده مثلث ها فرض کنیم : $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots}{\cdots}$

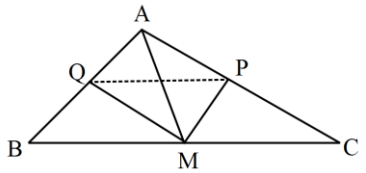
از طرفی با فرض BD و DC به عنوان قاعده مثلث ها داریم : $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots}{\cdots}$

از روابط بالا نتیجه می شود که : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : در مثلث ABC ، $AB = ۷, AC = ۵, BC = ۸$ است . طول قطعه های ایجاد شده از نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل را بیابید .

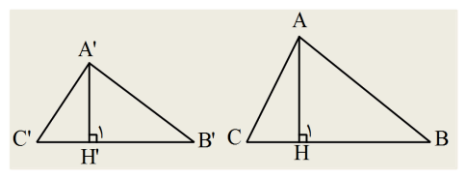
تمرین : در شکل مقابل AM میانه و MP و MQ نیمساز هستند . ثابت کنید $PQ \parallel BC$.



۲)نسبت اجزای فرعی ، محیط ها و مساحت های دو مثلث متشابه :

قضیه : در دو مثلث متشابه نسبت اجزای فرعی متناظر(ارتفاع ، نیمساز، میانه) برابر با نسبت تشابه است .

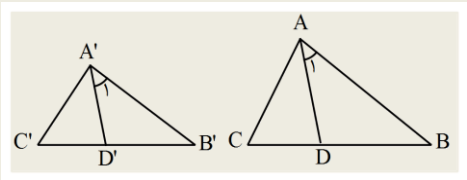
الف) ارتفاع ها :



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$$

اثبات : چون $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ پس $\hat{B} = \cdots$ از طرفی $\widehat{H_۱} = \widehat{H'_۱}$ پس بنا به حالت ..... دو مثلث ..... و ..... متشابه هستند لذا $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k$

ب) نیمساز ها :

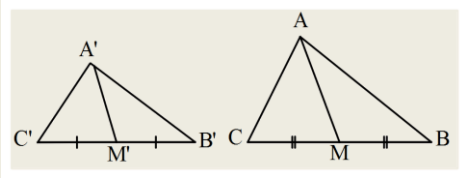


$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = k$$

اثبات : چون $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ پس $\hat{B} = \hat{B'}$ و $\hat{A} = \hat{A'}$ لذا $\widehat{A_۱} = \widehat{A'_۱}$ پس بنا به حالت ..... دو مثلث ..... و ..... متشابه هستند و $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

ج) میانه ها :



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$$

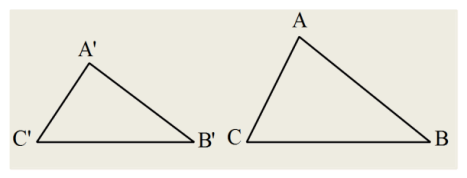
اثبات : چون $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ پس $\widehat{B} = \widehat{B'}$ از طرفی : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ که با تقسیم صورت و مخرج کسر دوم بر ۲ داریم :

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'}$ لذا بنا به حالت .....دو مثلث ..... و ..... متشابه هستند.

بنابر این $\frac{AM}{A'M'} = \frac{AB}{A'B'} = k$

قضیه : در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها برابر با نسبت تشابه و نسبت مساحت ها برابر با مجذور نسبت تشابه است .

الف) محیط ها :

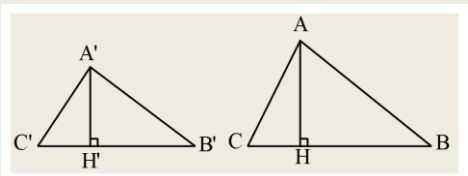


$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$$

اثبات : با توجه به ویژگی های تناسب :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = k \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$$

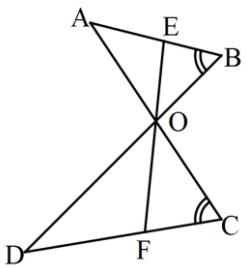
ب) مساحت ها :



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k$$

اثبات : با توجه به اینکه نسبت ارتفاع ها برابر با نسبت تشابه است :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times AH \times BC}{\frac{۱}{۲} \times A'H' \times B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \times \frac{BC}{B'C'} = k \times k = k^{۲}$$



تمرین : در شکل مقابل $EF = ۱۰$ نیسماز زاویه O است و $\hat{B} = \hat{C}$.

الف) دلیل تشابه مثلث های OAB و OCD را بیان کنید .

ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{۲}{۳}$ باشد ، طول OE و OF چقدر است ؟

تمرین : در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع های نظیر $\frac{۱}{۴}$ است . اگر مساحت مثلث کوچک ۵ باشد ، مساحت مثلث بزرگ چقدر است ؟

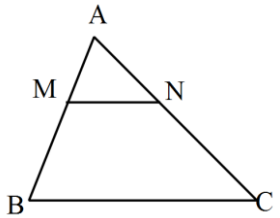
تمرین : طول اضلاع مثلثی ۶ و ۹ و $۳\sqrt{۳}$ و طل اضلاع مثلث دیگر ۴ و ۶ و $۲\sqrt{۳}$ است . نسبت مساحت مثلث بزرگ به مثلث کوچک چقدر است ؟

تمرین : طول اضلاع مثلثی ۱۰و۱۲و ۱۵ و طول بلند ترین ضلع مثلث متشابه با آن ۱۰ است . محیط مثلث دوم چقدراست ؟

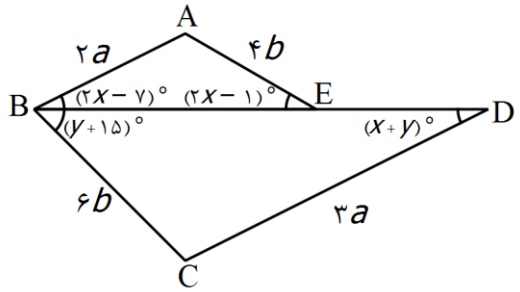
تمرین : اگر یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت کوچک تقسیم کنیم ، نسبت محیط مثلث اصلی چند برابر محیط یکی از این مثلث های کوچک است ؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

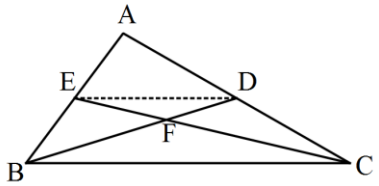
تمرین : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و مساحت ذوزنقه BCNM ، ۸ برابر مساحت مثلث AMN است . نسبت $\frac{MB}{MA}$ را بیابید .



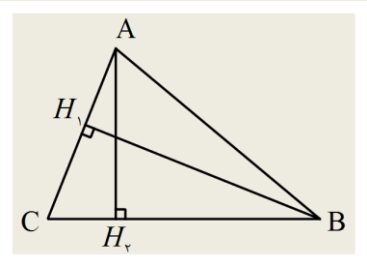
تمرین : در شکل مقابل $BE = ۲DE$ ، x,y را بیابید و نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را حساب کنید .



تمرین : در شکل مقابل BD و CE میانه هستند. نسبت مساحت مثلث FBC به مساحت FED چقدر است ؟



قضیه : در هر مثلث نسبت طول دو ضلع با عکس نسبت ارتفاع های وارد شده بر آنها برابر است .



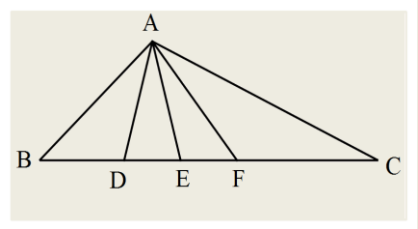
اثبات

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \cdots \times AH_2 \times \cdots \\ S_{ABC} = \cdots \times BH_1 \times \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots \Rightarrow \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

تمرین : طول اضلاع مثلثی ۴و۶و۸ است و طول بلند ترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ است . طول ارتفاع های دیگر مثلث را بیابید .

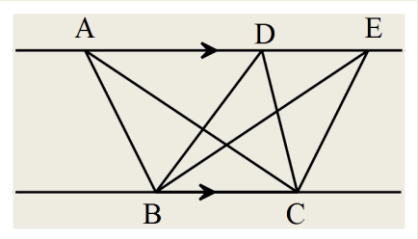
نسبت مساحت های دو مثلث هم ارتفاع :

قضیه : نسبت مساحت دو مثلث با ارتفاع های برابر ، مساوی با نسبت قاعده ها است .



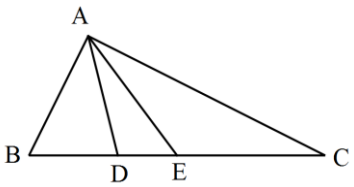
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \qquad \frac{S_{AEB}}{S_{AEF}} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

نتیجه : مساحت دو مثلث با ارتفاع ها و قاعده های برابر ، مساویند .

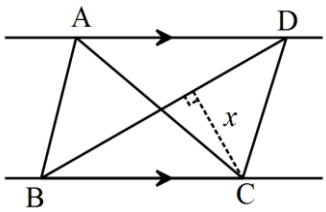


$$\frac{S_{ABC}}{S_{EBC}} = \cdots\cdots \qquad \frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \cdots\cdots$$

تمرین : در شکل قبل اگر مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است . نسبت های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را بنویسید .



تمرین : در شکل مقابل مساحت مثلث ABC برابر ۸ است . و طول $BD = ۶$ ، فاصله نقطه C از BC چقدر است ؟

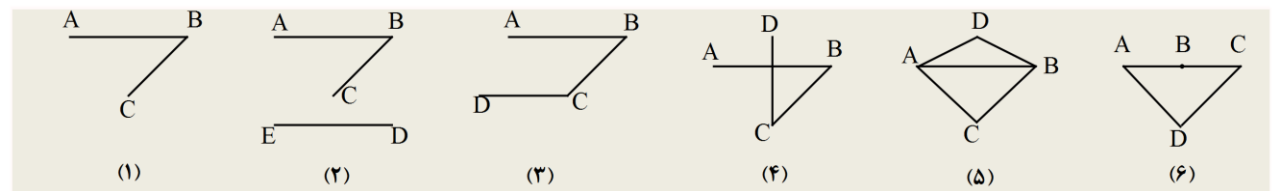


فصل سوم

چند ضلعی ها

درس اول : چند ضلعی و ویژگی های آن

فعالیت : به شکل های زیر توجه کنید .



(۱) : چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید حداقل ..... ضلع داشته باشد .

(۲): چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید اضلاع ..... باشند .

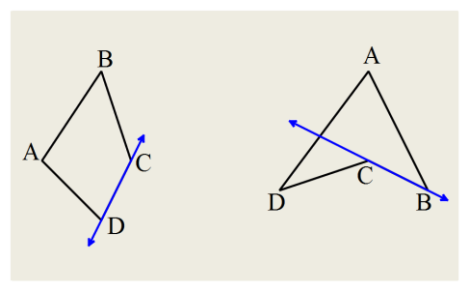
(۳): چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید اضلاع همدیگر را ..... کند .

(۴) : چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید اضلاع همدیگر را در نقاط ..... قطع کنند .

(۵): چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید هر ضلع دقیقاً ..... پاره خط دیگر را در نقاط انتهای خودش قطع کند .

(۶): چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید هیچ دو پاره خطی که انتهای مشترک دارند روی ..... نباشد .

تعریف چند ضلعی : شکلی شامل حداقل ..... پاره خطِ ..... که هر پاره خط ..... پاره خط دیگر را در ..... قطع کند و هیچ دو پاره خط با یک انتهای مشترک ، روی ..... نباشند .



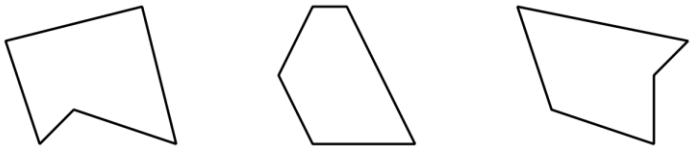
چند ضلعی محدب : چند ضلعی را محدب می گویند هرگاه وقتی هر ضلع آن را روی خطی قرار دهیم بقیه نقاط شکل در یک طرف خط قرار بگیرند .

چند ضلعی مقعر : هر چند ضلعی که محدب نباشد را مقعر می نامند .

فعالیت : با دقت در اندازه زاویه های داخلی دو شکل محدب و مقعر ، تعریف جدیدی برای چند ضلعی محدب بنویسید .

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : کدام یک از چند ضلعی های زیر محدب است ؟



قطر چند ضلعی محدب : هر پاره خطی که دو رأس غیر مجاور چند ضلعی را به هم وصل کند قطر چند ضلعی نامیده می شود .

فعالیت :

الف) از هر راس یک n ضلعی محدب می توان $n-۳$ قطر رسم کرد . چرا ؟

ب) آیا می توان گفت چون n رأس داریم و از هر راس $n-۳$ قطر رسم می شود پی تعداد تمام قطر ها $n(n-۳)$ است ؟

ج) فرمول بدست آمده برای تعداد قطر در مرحله قبل را با تعداد قطر های ۴و۵ ضلعی محدب امتحان کنید . رابطه تعداد قطر های واقعی با تعداد قطر های حساب شده با این فرمول در چیست ؟

به نظر شما دلیل این تفاوت چیست ؟ فرمول درست را بدست آورید .

تمرین : در کدام n ضلعی محدب تعداد قطر ها و تعداد ضلع ها برابر است ؟

تمرین : تعداد قطر های رسم شده از یک راس n ضلعی محدب برابر $۲n-۹$ است . تعداد قطر های این چند ضلعی چقدر است ؟

(راهنمایی : از هر راس $n-۳$ قطر رسم می شود)

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : از به یک n ضلعی محدب یک راس بیافزاییم تعداد قطر هایش ۲۱ تا بیشتر می شود . مجموع زاویه های داخلی آن چقدر است

(راهنمایی : با افزودن هر راس تعداد قطر ها $n-1$ تا بیشتر می شود)

تمرین : مجموع تعداد اضلاع و قطر های یک n ضلعی محدب برابر ۲۱ است . از هر راس آن چند پاره خط می گذرد ؟

تمرین : زاویه های داخلی یک n ضلعی منتظم ۱۵۰ درجه است . تعداد قطر های آن چقدر است ؟

چهار ضلعی های مهم و تعریف آنها :

متوازی الاضلاع : چهار ضلعی که هر دو ضلع مقابل آن موازی هستند .

مستطیل : چهار ضلعی که همه زاویه های آن قائمه هستند .

لوزی : چهار ضلعی که همه اضلاع آن با هم برابرند .

مربع : چهار ضلعی که همه اضلاع آن برابر و حداقل یک زاویه آن قائمه است .

فعالیت :

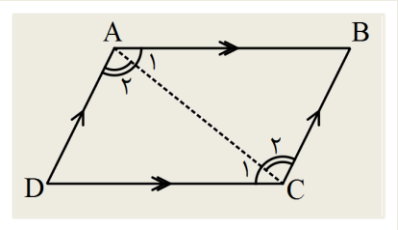
الف) مستطیل را به کمک متوازی الاضلاع تعریف کنید .

ب) مربع را به کمک مستطیل تعریف کنید .

ج) ثابت کنید لوزی یک متوازی الاضلاع است . (با رسم قطر ، همنهشتی و قضیه خطوط موازی)

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

ویژگی های متوازی الاضلاع :



قضیه ۱ : در متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه هستند .

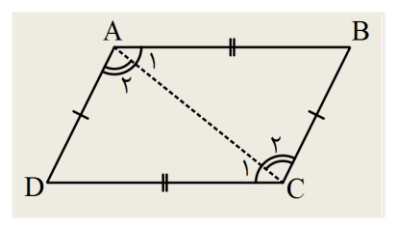
اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :

اگر AC را مورب دو خط موازی AB و DC در نظر بگیریم : ...=...

اگر AC را مورب دو خط موازی AD و BC در نظر بگیریم : ...=...

از دو رابطه قبل نتیجه می شود بنا به حالت ..... دو مثلث ایجاد شده هم نهشت هستند در نتیجه : .....

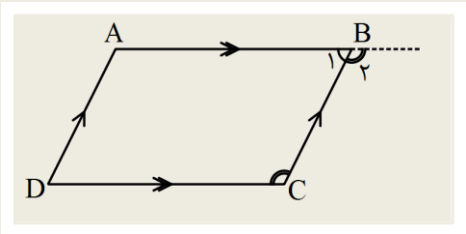
عکس قضیه ۱ : اگر در یک چهار ضلعی هر دو ضلع مقابل هم اندازه باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :

بنا به حالت ..... دو مثلث ایجاد شده هم نهشت هستند پس : ...=... و ...=...

و طبق عکس قضیه خطوط موازی ..... و .....



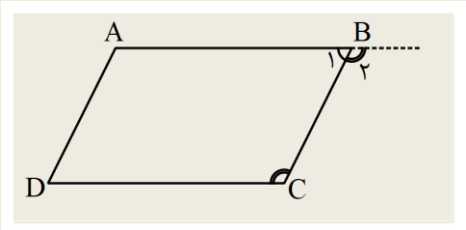
قضیه ۲ : در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل هستند .

اثبات : اگر BC مورب در نظر بگیریم داریم : ...=...

از طرفی در رأس B یک نیم صفحه داریم پس : .....

از دو رابطه قبل نتیجه می شود که : .....

عکس قضیه ۲ : اگر در یک چهار ضلعی هر دو زاویه مجاور مکمل باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



اثبات : از مکمل بودن زاویه های B و C نتیجه می شود : .....

از نیم صفحه راس B هم داریم : .....

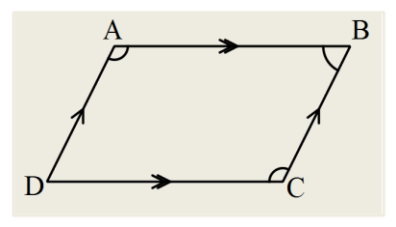
از دو رابطه قبل نتیجه می شود : .....

پس $AB \parallel DC$ و به همین ترتیب از مکمل بودن زاویه های A و B نتیجه

می شود که $AD \parallel BC$.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

قضیه ۳ : در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مقابل هم اندازه هستند .

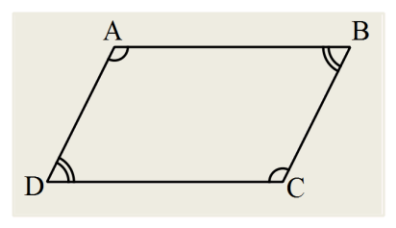


اثبات : زاویه های B و C مکمل هستند پس : .....

زاویه های B و A مکمل هستند پس : .....

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : .....

عکس قضیه ۳ : اگر در چهار ضلعی هر دو زاویه مقابل برابر باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



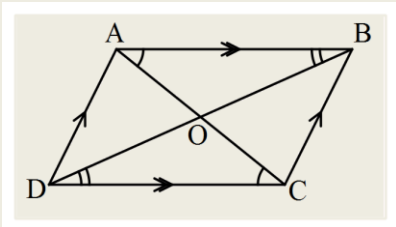
اثبات : مجموع زاویه های هر چهار ضلعی ..... درجه است .

از طرفی $\widehat{A}=\widehat{C}=a$ و $\widehat{B}=\widehat{D}=b$ پس : .....

در نتیجه هر دو زاویه مجاور مکمل هستند و طبق عکس قضیه قبل

چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .

قضیه ۴ : در متوازی الاضلاع قطر ها منصف یکدیگر هستند .



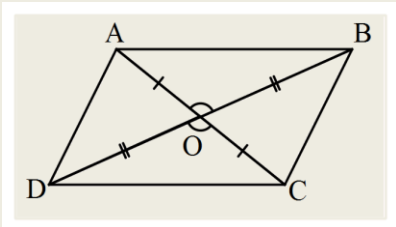
اثبات :

با توجه به موازی بودن AB و DC و مورب بودن قطر ها داریم : .....

و چون AB=DC نیز است پس بنا به حالت ..... دو مثلث .....و.....

همنهشت هستند و در نتیجه ...=... و ...=...

عکس قضیه ۴ : اگر در چهار ضلعی قطر ها همدیگر را نصف کنند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



اثبات : از آنجایی که AO=CO و BO=DO و $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ پس بنا به حالت

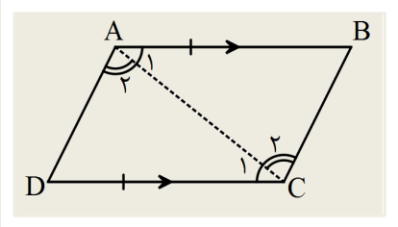
دو ضلع و زاویه بین دو مثلث ABO و DCO هم نهشت هستند و ...=...

پس ...||... .

به همین ترتیب ثابت می شود $AD \parallel BC$.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

قضیه ۵ : هر چهار ضلعی که **دو ضلع مقابل** آن **موازی** و **مساوی** باشد ، متوازی الاضلاع است .



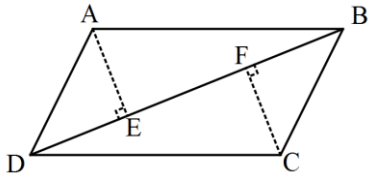
اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :

با فرض AC به عنوان مورب داریم : .....

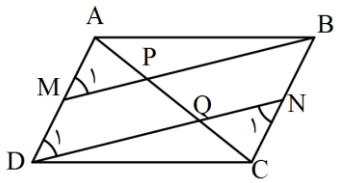
پس بنا به حالت ..... دو مثلث همنهشت هستند و $\widehat{A_۲} = \cdots$

و این یعنی $\cdots \parallel \cdots$

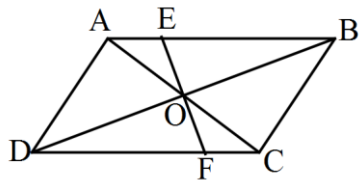
تمرین : ثابت کنید فاصله دو رأس مقابل از قطری که از دو رأس دیگر رسم شده است ، برابر است .



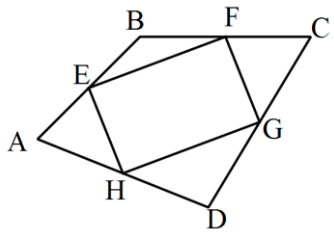
تمرین : در متوازی الاضلاع ABCD ، M و N نقاط وسط اضلاع هستند .ثابت کنید $AP = PQ = QC$. (راهنمایی : از همنهشتی به برابری دو زاویه و توازی MB و DN برسید سپس از قضیه تالس استفاده کنید)



تمرین : ثابت کنید در متوازی الاضلاع محل برخورد قطر ها ، نقطه وسط هر پاره خطی است که از این نقطه می گذرد و دو سر آن روی متوازی الاضلاع است .(راهنمایی : از تشابه دو مثلث AEO و FCO استفاده کنید)

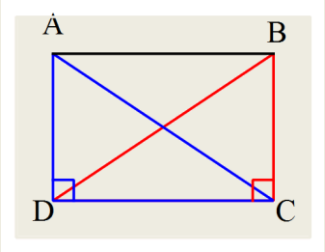


تمرین : ثابت کنید اگر اوساط اضلاع یک چهار ضلعی دلخواه را به هم وصل کنیم شکل حاصل متوازی الاضلاع است .



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

ویژگی های خاص مستطیل :



قضیه ۱ : در هر مستطیل قطر ها برابرند .

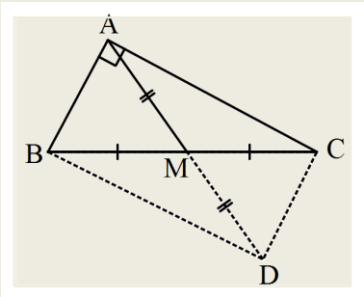
اثبات : دو مثلث ADC و BCD بنا به حالت ..... همهنشت هستند

پس : .....

سوال : آیا چهار ضلعی که قطر هایش برابر است الزاماً مستطیل است ؟ در صورت منفی بودن جواب ، مثال نقض بیاورید .

در مورد متوازی الاضلاعی که این خاصیت را داشته باشد چطور ؟

قضیه۲ : در مثلث قائم الزاویه ، اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است .

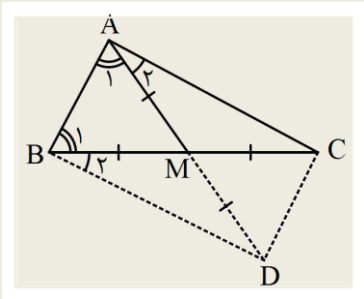


اثبات : میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم :

چهار ضلعی حاصل به دلیل .....متوازی الاضلاع است و

به دلیل ..... مستطیل است .پس قطر ها برابرند و $AM = \frac{BC}{۲}$.

عکس قضیه ۲ : اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع ، نصف اندازه آن ضلع باشد ، مثلث قائم الزاویه است .



اثبات : میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم :

چهار ضلعی حاصل متوازی الاضلاع است و زاویه های مجاور مکمل هستند

پس : .....

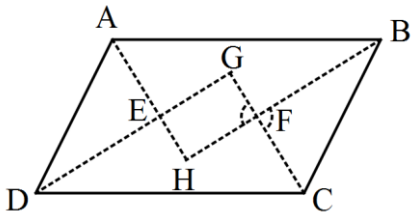
مثل های ایجاد شده همگی متساوی الساقین هستند و $\overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{BMD}$

پس : .....

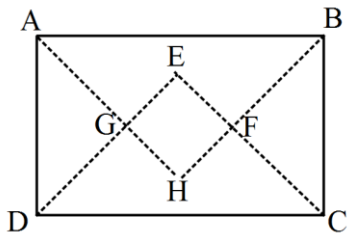
از دو رابطه قبل نتیجه می شود : $\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

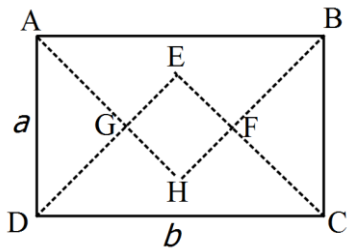
تمرین : ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمساز های داخلی یک متوازی الاضلاع مستطیل است . (راهنمایی : از مکمل بودن زاویه های مجاور B و C و مکمل بودن D و C قائمه بودن زاویه های شکل حاصل را مشخص کنید)



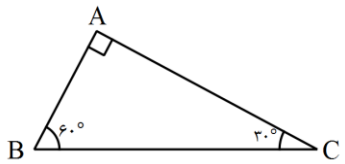
تمرین : ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمساز های داخلی یک مستطیل ، مربع است . (راهنمایی : از متساوی الساقین بودن DEC و همنهشتی AGD و BFC استفاده کنید)



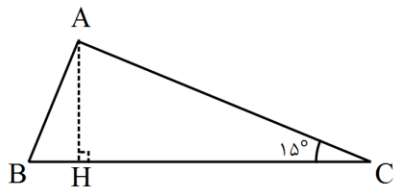
تمرین : در تمرین قبل اگر طول و عرض مستطیل b و a باشد ، رابطه اندازه ضلع مربع با اندازه اضلاع مستطیل را بیابید .



تمرین : در مثلث قائم الزاویه با زاویه ۳۰ درجه ، اندازه ضلع مقابل به این زاویه نصف وتر است .(میانه وارد بر وتر را رسم کنید)

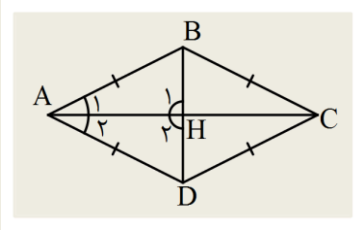


تمرین : در مثلث قائم الزاویه با زاویه ۱۵ درجه ، اندازه ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است .(میانه وارد بر وتر را رسم کنید)



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

ویژگی های خاص لوزی :



قضیه ۱ : در هر لوزی قطرها نیمساز زاویه ها و عمود بر هم هستند .

اثبات : مثلث های ABC و ADC بنا به حالت ..... همنهشت هستند پس :

..... و این یعنی AC نیمساز است و به همین ترتیب BD نیز نیمساز است.

در نتیجه مثلث های ABH و ADH بنا به حالت ..... همنهشت هستند

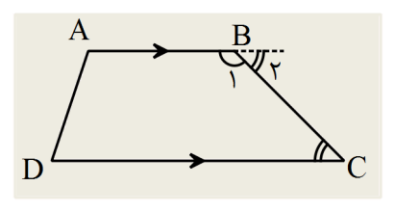
و $\widehat{H_۱} = \widehat{H_۲} = ۹۰^\circ$

سوال : آیا چهار ضلعی که قطر هایش برهم عمودند یا نیمساز زاویه ها هستند الزاماً لوزی است ؟ در صورت منفی بودن جواب ، مثال نقض بیاورید .

در مورد متوازی الاضلاعی که این خاصیت را داشته باشد چطور ؟

ذوزنقه و ویژگی های آن :

ذوزنقه : چهار ضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشند .

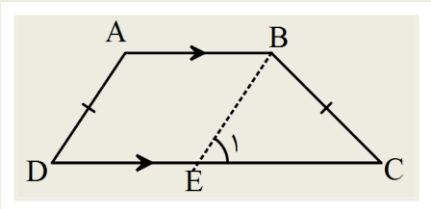


قضیه ۱ : در هر ذوزنقه زاویه های مجاور به یک ساق مکمل هستند .

اثبات : با در نظر گرفتن مورب BC داریم : .....

و با توجه به نیم صفحه به راس B داریم : .....

در نتیجه :.....



قضیه ۲ : در هر ذوزنقه متساوی الساقین زاویه های مجاور به یک قاعده برابر هستند .

اثبات : پاره خط BE را موازی AD رسم می کنیم (یک ایده خوب) :

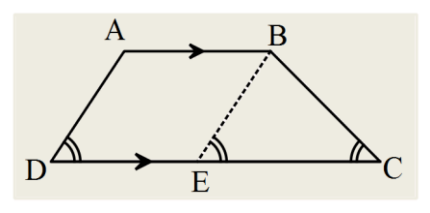
چهار ضلعی ABED ..... است و BE=..... و $\widehat{D} = \cdots$

BE=BC در نتیجه مثلث BCE متساوی الساقین است و $\widehat{E_۱} = \cdots$

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : ..... و به همین ترتیب ثابت می شود $\widehat{A} = \widehat{B}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

عکس قضیه ۲ : اگر در یک ذوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده برابر باشند ، ذوزنقه متساوی الساقین است .



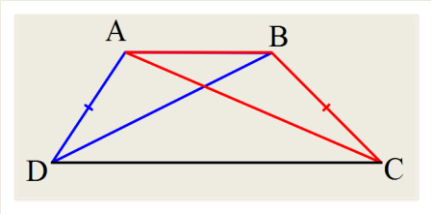
اثبات : پاره خط BE را موازی AD رسم می کنیم :

چهار ضلعی ABED ..... است و $\widehat{D}=\cdots$ و AD=....

و چون $\widehat{D}=\widehat{C}$ پس ..... و مثلث BEC متساوی الساقین است

بنابر این BE=BC و چون AD=BE داریم : AD=BC

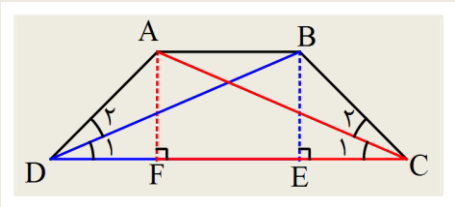
قضیه ۳ : در ذوزنقه متساوی الساقین اندازه قطر ها با هم برابر است .



اثبات : از آنجایی که $\widehat{A}=\widehat{B}$ دو مثلث ABC و ABD بنا به حالت .....

همنهشت هستند و AC=BD

عکس قضیه ۳ : اگر در ذوزنقه ای اندازه قطر ها برابر باشند ، ذوزنقه متساوی الساقین است .



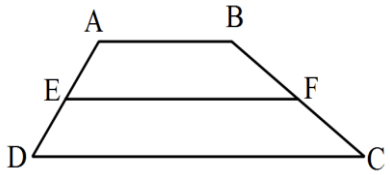
اثبات : ارتفاع های AF و BE را رسم می کنیم دو مثلث AFC و BED

بنا به حالت ..... همنهشت هستند پس : $\widehat{D_1}=\cdots$

از آنجا که $\widehat{D}=\widehat{C}$ پس $\widehat{D_2}=\cdots$ در نتیجه مثلث های ABD و ABC

بنا به حالت ..... همنهشت هستند و AD=BC .

تمرین : ثابت کنید در هر ذوزنقه اندازه پاره خطی که وسط ساقها را به هم وصل می کند ، نصف مجموع اندازه دو قاعده است .



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

درس دوم : مساحت و کاربرد آن

یاد آوری :

مساحت مستطیل : اگر طول و عرض آن a,b باشد : $S = ab$

مساحت مربع : اگر طول ضلع آن a باشد : $S = a^{۲}$

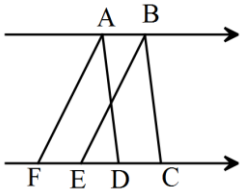
مساحت مثلث : اگر اندازه یک ضلع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد : $S = \frac{۱}{۲}ha$

متوازی الاضلاع : اگر اندازه یک ضلع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد : $S = ha$

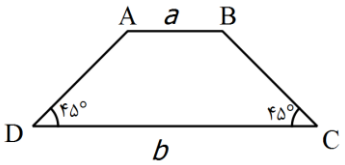
مساحت لوزی : اگر اندازه دو قطر آن m و n باشد : $S = \frac{۱}{۲}mn$

مساحت ذوزنقه : اگر اندازه دو قاعده a و b و اندازه ارتفاع آن h باشد : $S = \frac{۱}{۲}(a+b)h$

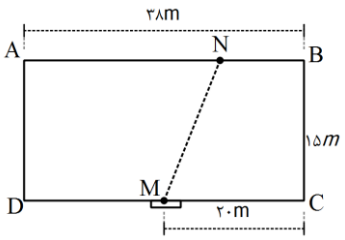
تمرین : دو متوازی الاضلاع ABCD و ABEF بین دو خط موازی در شکل زیر رسم شده اند . اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع ها S باشد . مساحت دیگری بر حسب S چیست ؟ (راهنمایی : ارتفاع هر دو همان فاصله دو خط موازی است)



تمرین : در ذوزنقه زیر مساحت را بر حسب a و b بدست آورید .(راهنمایی : از A و B عمود هایی رسم کنید تا مثلث های کناری متساوی الساقین پدید آید)

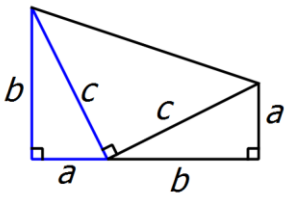


تمرین : در باغی مستطیل شکل زیر که دو برادر به یک اندازه در آن سهیم هستند فقط یک در در نقطه M وجود دارد . نقطه N را در چه قسمتی از AB قرار دهیم تا خط MN باغ را برای دو برادر به دو قسمت هم مساحت تقسیم کند تا هر دو برادر به در دسترسی داشته باشند ؟ (در واقع باید قرار داد BN=x و بقیه اضلاع را برحسب آن نوشته و مساحت دو ذوزنقه را برابر قرار داد)

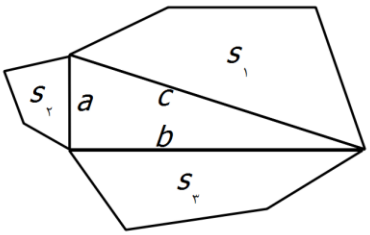


** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

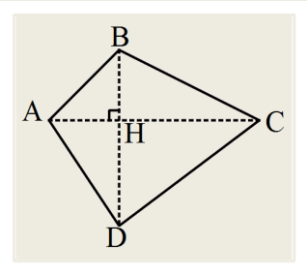
تمرین : قضیه فیثاغورس را به کمک ذوزنقه زیر اثبات کنید .



تمرین : ثابت کنید اگر سه چند ضلعی متشابه روی اضلاع مثلث قائم الزاویه رسم شود . مساحت شکل روی وتر برابر با مجموع مساحت دو شکل دیگر است .



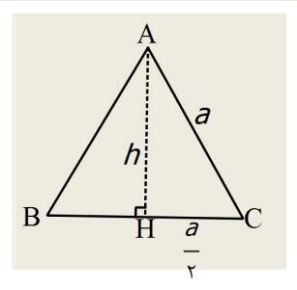
قضیه : مساحت هر چهار ضلعی که قطر های آن عمود باشند ، برابر با نصف حاصل ضرب اندازه قطر ها است .



اثبات : مساحت مثلث ABC برابر :.....

مساحت مثلث ADC برابر : .....

از جمع دو رابطه قبل مساحت کل برابر است با : .....

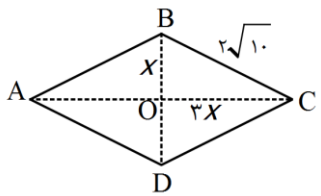


قضیه: مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a برابر $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است .

اثبات : با رابطه فیثاغورس داریم :..... $h=$

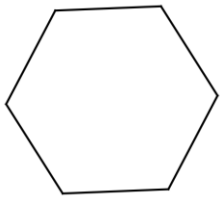
پس طبق فرمول مساحت مثلث داریم : ..... $S=$

تمرین : در یک لوزی اندازه هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه های دو قطر $\frac{1}{3}$ است . مساحت لوزی را بیابید .

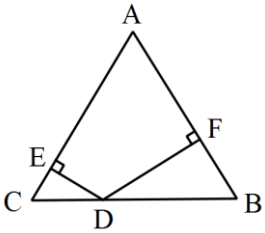


** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

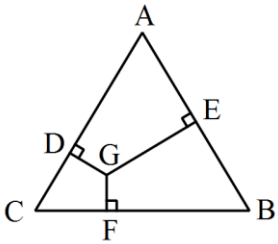
تمرین : مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع a را بدست آورید .



تمرین : ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از ساقها برابر با ارتفاع وارد بر ساق است .



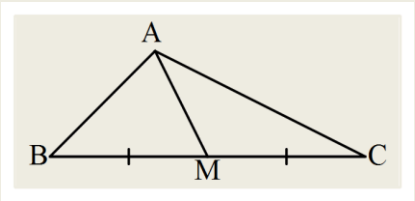
تمرین : ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر با ارتفاع مثلث است .



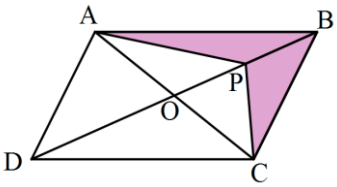
قضیه : ثابت کنید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند .

اثبات : دو مثلث ایجاد شده دارای ارتفاع مشترک با قاعده های هم اندازه هستند

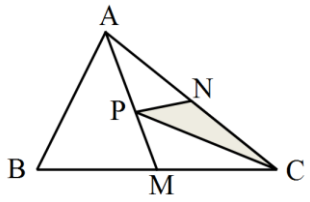
پس .....



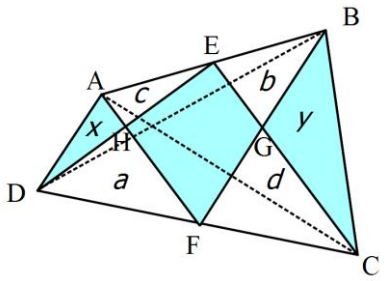
تمرین : ثابت کنید در متوازی الاضلاع زیر اگر نقطه P در مکان دلخواهی روی قطر BD باشد ، مساحت دو مثلث ABP و BPC برابر است .



تمرین : در شکل زیر M وN وP نقاط وسط اضلاع هستند . مساحت مثلث PNC چه کسری از مساحت کل است ؟



تمرین : اگر در چهار ضلعی دلخواه ABCD نقاط E و F وسط اضلاع باشند ثابت کنید : $S_{EGFH}=S_{BGC}+S_{AHD}$



اثبات : با رسم قطر AC داریم : $a+x=\frac{۱}{۲}S_{ADC}$, $b+y=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$

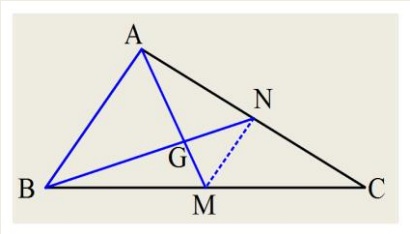
در نتیجه : $a+x+b+y=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$

با رسم قطر BD داریم : .....

در نتیجه : .....

از مجموع تساوی های دو نتیجه قبلی داریم : $x+y+\underbrace{a+b+x+y+c+d}_{e}=S_{ABCD}\Rightarrow x+y=S_{ABCD}-e=S_{EGFH}$

قضیه : هر سه میانه یک مثلث در نقطه ای درون مثلث همرسند. و فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است و فاصله آن تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است .



اثبات : با رسم دو میانه AM وBN و رسم پاره خط MN

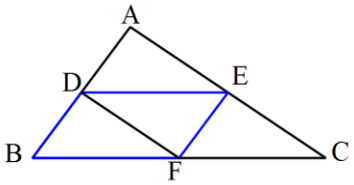
دو مثلث GMN و ..... بنا به حالت ..... متشابه هستند

و چون $AB=۲MN$ پس $BG=\cdots$ و $AM=\cdots$.

در نتیجه برای هر دو میانه دلخواه این نسبت برقرار است و لذا میانه ها همرسند و

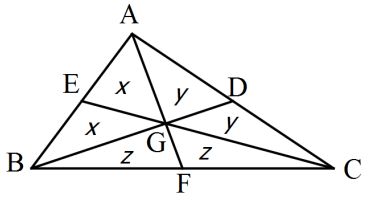
قاصله نقطه همرسی تا وسط هر ضلع $\frac{۱}{۳}$ اندازه میانه نظیر این ضلع و فاصله آن تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است .

تمرین : ثابت اگر اوساط اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم ، چهار مثلث با مساحت های مساوی بدست می آید .(راهنمایی : ثابت کنید BDEF متوازی الاضلاع است و قطرش آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می کند و در مورد بقیه قسمت ها هم همین طور)



** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

تمرین : ثابت کنید سه میانه یک مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کند .



اثبات : GD و GE و GF به ترتیب میانه های مثلث های AGC و AGB و BGC

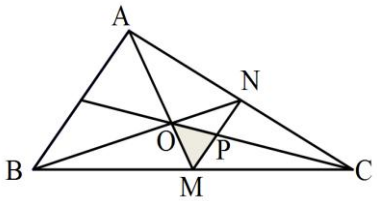
خواهند بود بنابر این مساحت های مشخص شده با هم برابرند .

از طرفی AF میانه مثلث ABC است پس $x+x+z=y+y+z \Rightarrow x=y$

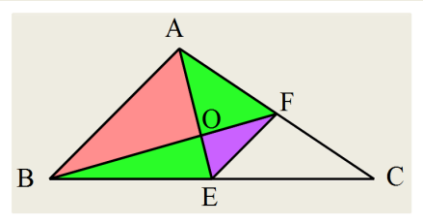
همین طور EC میانه مثلث ABC است پس .....

در نتیجه : .....

تمرین : در شکل زیر مساحت مثلث MOP چه کسری از مساحت کل است ؟ (راهنمایی : وسط اضلاع مثلث ABC را رسم می کنیم میانه های مثلث ABC میانه های مثلث ایجاد شده نیز هستند . چرا ؟ . حال از دو تمرین قبل استفاده کنید)



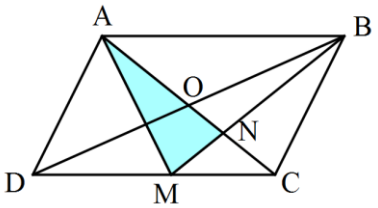
نتیجه : اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم ، از برخورد دو میانه مثلث داریم :



$$S_{OFE}=\frac{۱}{۱۲}S \quad , \quad S_{ABO}=\frac{۱}{۳}S$$

$$S_{AOF}=S_{BEO}=\frac{۱}{۶}S \quad , \quad S_{FEC}=\frac{۱}{۴}S$$

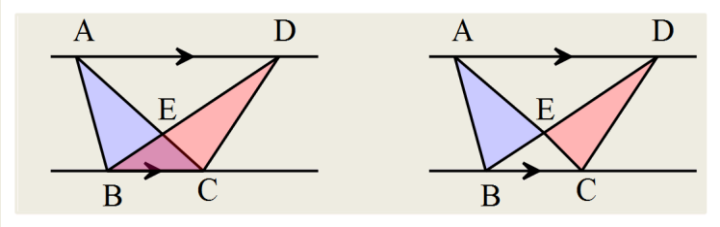
تمرین : در متوازی الاضلاع زیر M وسط DC است . مساحت مثلث AMN چه کسری از مساحت کل است ؟



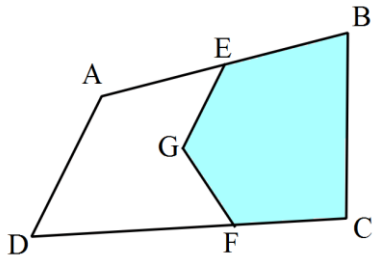
(راهنمایی : $S_{AMN}=\frac{۱}{۳}S_{AMB}$ چرا ؟)

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

توجه : می دانیم دو مثلث هم قاعده بین دو خط موازی هم مساحت هستند (در ذوزنقه همینطور) پس با حذف مثلث مشترک از هر دوی آنها مثلث های باقی مانده نیز هم مساحت هستند .

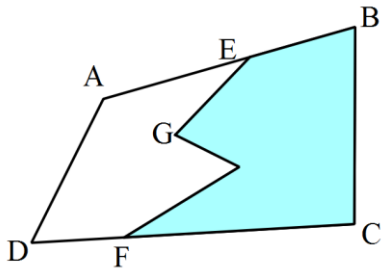


تمرین : مرزی با یک پاره خط مستقیم برای این دو زمین کشاورزی طوری رسم کنید که مساحت هر زمین حفظ شود .



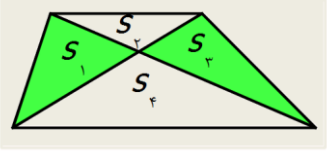
تمرین : مرزی با یک پاره خط مستقیم برای این دو زمین کشاورزی طوری رسم کنید که مساحت هر زمین حفظ شود .

(راهنمایی : دوبار راه حل تمرین قبل را تکرار کنید)



بیشتر بدانیم : در ذوزنقه اگر از وسط یک ساق موازی ساق دیگر خطی رسم شود به متوازی الاضلاعی هم مساحت با ذوزنقه می رسیم . و اگر یکی از رئوس را به وسط ساق مقابل وصل کرده و امتداد دهیم به مثلثی هم مساحت با ذوزنقه می رسیم .

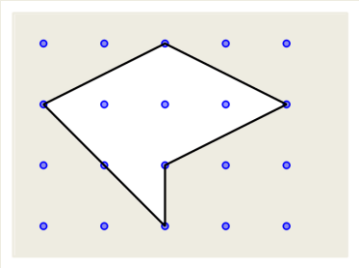
در هر چهار ضلعی از رسم قطر ها ۴ مثلث پدید می آید که حاصل ضرب مساحت دو مثلث مقابل با حاصل ضرب دو مثلث مقابل دیگر برابر است پس در ذوزنقه داریم :



$$S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4 \xrightarrow{S_1=S_3} S_1^2 = S_2 \times S_4$$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

نقاط شبکه ای وچند ضلعی شبکه ای : نقاطی روی خطها افقی و عمودی که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) یک واحد است . هر چند ضلعی که همه رئوس آن روی نقاط شبکه ای باشد را چند ضلعی شبکه ای می گویند .

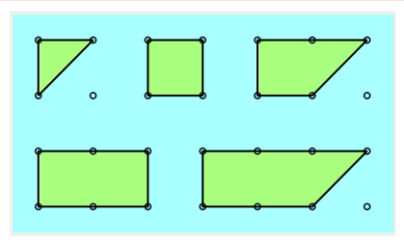


توجه: برای یک چند ضلعی شبکه ای ، نقاط شبکه ای روی چند ضلعی را نقاط **مرزی شبکه ای** می گویند و تعداد آنها را با b نمایش می دهند . نقاط شبکه ای درون چند ضلعی را نقاط **دورنی شبکه ای** می گویند و تعداد آنها را با i نمایش می دهند . مثلاً در شکل بالا $i = ۳, b = ۶$ است .

توجه : می توان نقاط شبکه ای را در یک دستگاه مختصات با مختصات های (x, y) در نظر گرفت که x و y هر دو عدد صحیح باشند.

فعالیت :

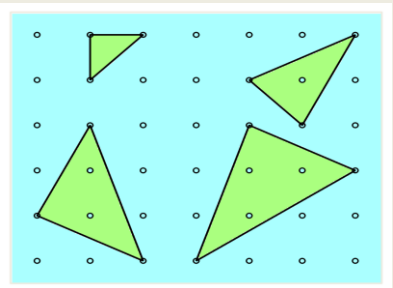
الف) i را صفر نگه داشته و چند ضلعی های شبکه ای با $b = ۳, ۴, ۵, \ldots$ بسازید . و جدول زیر را پرکنید .



b	۳	۴	۵	۶	۷
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$		

ب) رابطه بین مساحت با تعداد نقاط مرزی شبکه ای را کامل کنید : $S = \frac{b}{\ldots} - \cdots + ۰$

ج) حال $b = ۳$ را ثابت نگه داشته و چند ضلعی های شبکه ای با $i = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$ رسم کنید . و جدول را کامل کنید .



i	۰	۱	۲	۳	۴
$\frac{b}{۲} - ۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$		
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$			

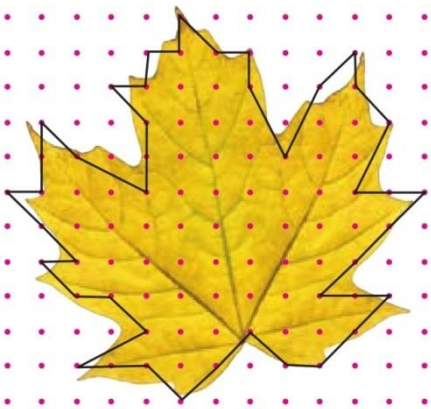
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

د) حال رابطه سطر اول و دوم با سطر سوم را بنویسید : $\boxed{S=\frac{b}{۲}-\cdots+\cdots}$

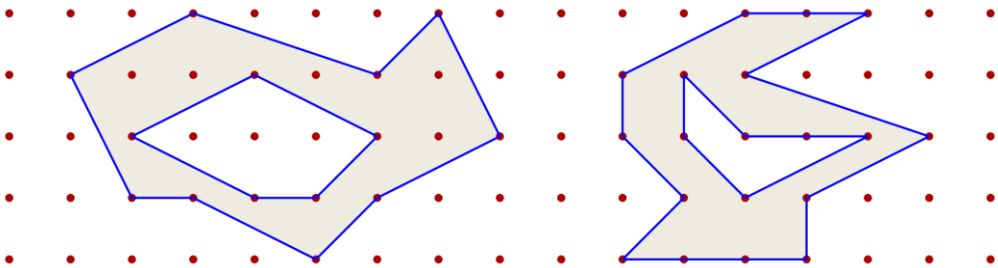
رابطه بالا که به صورت شهودی بدست آمد به **فرمول پیک** شهرت دارد که جرج الکساندر پیک آن را کشف و اثبات کرد .

نکته : با فرمول پیک می توان مساحت شکل های نامنظم را به طور تقریبی بدست آورد .

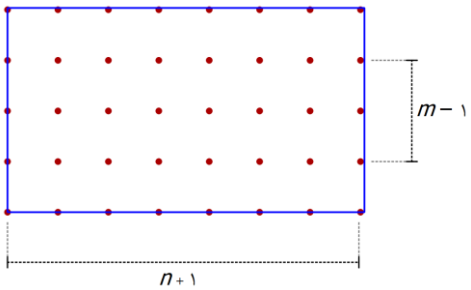
تمرین : مساحت برگ داده شده را تخمین بزنید .



تمرین : مساحت قسمت هاشور خورده را بدست آورید .



تمرین : فرمول مساحت مستطیل m واحد در n واحد را به کمک فرمول پیک بدست آورید .



حل : این مستطیل دارای $b=۲(\cdots\cdots)+۲(\cdots\cdots)=۲n+۲m$ نقطه مرزی خواهد بود .

و تعداد نقاط دورنی $i=(\cdots\cdots)(\cdots\cdots)=nm-n-m+۱$ خواهد بود .

پس : $S=\frac{۲n+۲m}{۲}+(nm-n-m+۱)-۱=\cdots$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

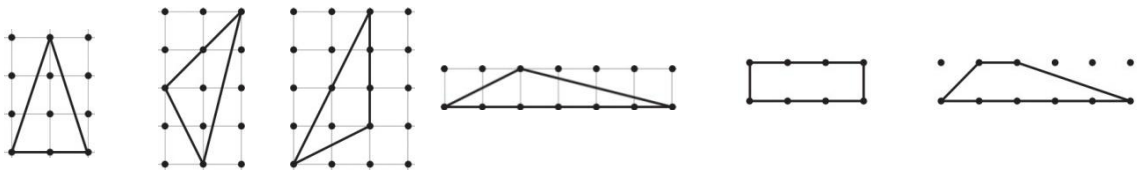
تمرین :مساحت یک چند ضلعی شبکه ای ۳ واحد است .

الف) جدولی تشکیل دهید و تمام حالت های ممکن برای عداد نقاط مرکزی و درونی را بنویسید .

حل : از آنجا که $b \geq ۳$; $\frac{b}{۲}+i-۱=۳ \Rightarrow b=\cdots\cdots\cdots\cdots$ پس داریم :

i	۰	۱	۲
b			

ب) تعدادی از حالت های شکل مثلث باشد را رسم کنید .تعدادی از حالت هایی که چهار ضلعی با بیشترین نقاط مرزی باشد را رسم کنید . ($b=۸, i=۰$)



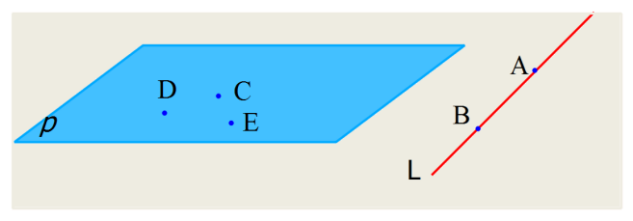
فصل چهارم

تجسم فضایی

درس اول : خط، نقطه و صفحه

.

نقطه خط و صفحه از مفاهیم مهم هندسی هستند که معمولاً به صورت زیر نمایش داده می شوند .

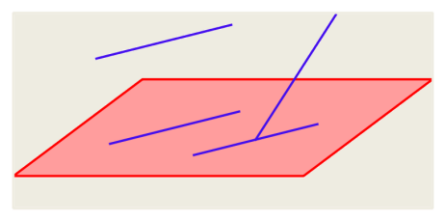


خط AB یا BA و یا خط L

صفحه DCE یا CDE یا ... و یا صفحه P

توجه : خط صفحه نامحدودند و ضخامتی هم ندارند .

حالت های مختلف دو خط در فضا : (منطبق ، موازی ، متقاطع ، متنافر)



دو خط متنافر : دو خط را در فضا متنافر می گویند هر گاه در یک صفحه نبوده و همدیگر را قطع نکنند .

فعالیت : در شکل بالا خطوط را نام گذاری کنید و برای هر حالت دو خط در فضا مثالی از این خطوط بزنید .

سوال : در صفحه از هر نقطه چند خط می گذرد ؟ در فضا چطور ؟

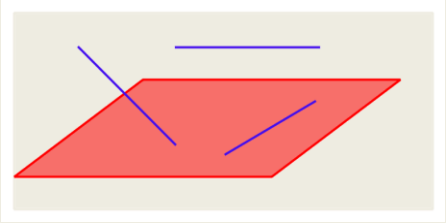
سوال : در صفحه از یک نقطه خارج خط چند خط موازی آن می توان رسم کرد ؟ در فضا چطور ؟

سوال : آیا در فضا هم دو خط موازی با یک خط خود با هم موازی هستند ؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

سوال : آیا در فضا هم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند ؟

حالت های مختلف خط و صفحه در فضا : (منطبق ، متقاطع، موازی)



سوال : از یک خط در فضا چند صفحه می گذرد ؟

سوال : ازدو خط متقاطع در فضا چند صفحه می گذرد ؟از دو خط موازی چطور ؟

سوال : از یک نقطه خارج صفحه چند خط موازی آن صفحه می توان رسم کرد ؟

سوال: دو خط L و d در فضا با هم موازیند .

اگر صفحه ای موازی یک از آنها باشد آیا الزاماً با دیگری موازی است ؟

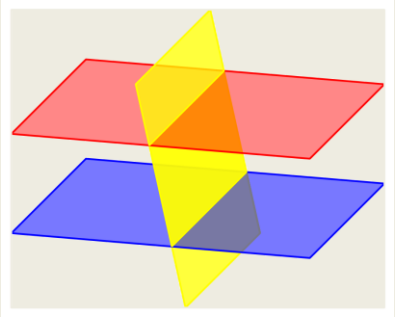
اگر صفحه شامل یکی از آنها باشد با دیگری چه وضعیتی دارد ؟

اگر صفحه با یکی از آنها متقاطع باشد با دیگری چه وضعیتی دارد ؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

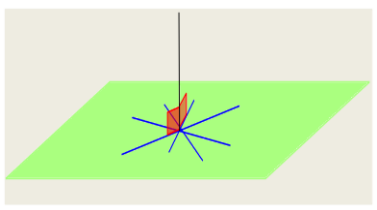
سوال : سوال قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط متنافر باشند .

حالت های مختلف دو صفحه در فضا : (منطبق، موازی ، متقاطع)



تمرین : در مکعب زیر دو خط موازی ، دو خط متنافر ، یک خط و صفحه موازی ، دو صفحه موازی ، دو صفحه متقاطع نام ببرید .

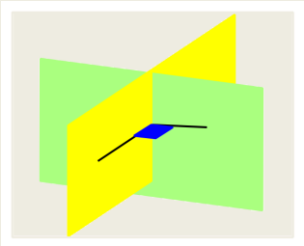
تعامد خط و صفحه : اگر خطی در یک نقطه صفحه را قطع کند بر آن صفحه عمود است ،هرگاه بر تمام خطوط آن صفحه که از این نقطه می گذرند عمود باشد .



می توان نشان داد اگر این خط **فقط بر دو خط متقاطع** از صفحه

عمود باشد ، بر صفحه عمود است .

تعامد دو صفحه : دو صفحه بر هم عمودند هرگاه هر یک شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است .



سوال: از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه چند خط می توان بر آن عمود کرد ؟

سوال: از هر **خط** غیر واقع بر یک صفحه چند صفحه می توان بر آن عمود کرد ؟

سوال : دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه Q عمود است . این خط با صفحه P چه وضعیتی دارد ؟

سوال : دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند . فصل مشترک آنها با R چه وضعیتی دارد ؟

سوال : آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی هستند ؟

سوال : آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی هستند ؟

سوال : دو صفحه عمود بر یک خط با هم چه وضعیتی دارند ؟

سوال : اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد ، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد ؟

سوال : اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه ای عمود باشد ، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید .

تمرین : تمرینات صفحه ۸۴ و ۸۵ کتاب انجام شود .

تمرین : صفحه P و نقطه O روی آن را در نظر بگیرید . خط d را طوری رسم کنید که از نقطه O بگذرد .کدام وضعیت در مورد این خط و صفحه صحیح است ؟

الف) خط بر صفحه واقع است .

ب) خط و صفحه متقاطع هستند.

ج) خط و صفحه موازیند .

تمرین : دو صفحه متمایز p', p در نقطه A مشترک هستند . دوصفحه نسبت به هم چه وضعی دارند ؟

الف) متقاطعند.

ب) منطبقند .

ج) موازیند .

تمرین : دو صفحه p', p و خط d را در هر دو صفحه در نظر بگیرید . دو صفحه نسبت به هم چه وضعی دارند ؟

الف) متقاطعند.

ب) منطبقند .

ج) موازیند .

تمرین :دو خط d', d موازیند . اگر صفحه P و خط d موازی باشند کدام گزینه درست است ؟

الف) خط d' و صفحه P موازیند .

ب) خط d' بر صفحه P عمود است .

ج) خط d' و صفحه P متقاطعند .

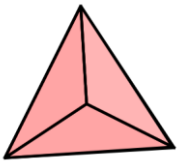
د) الف و ج صحیح است .

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

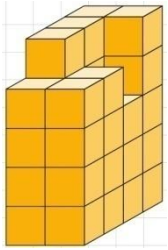
درس دوم : تفکر تجسمی

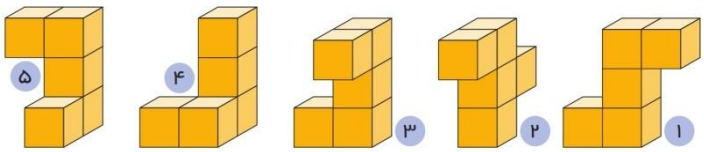
در این درس هدف تجسم اجسام و اشکال است . به همین دلیل ما فقط سعی داریم با مثال های متعدد در این زمینه به تبحر کافی برسیم .

۱) شکل زیر کدام شکل هندسی است که از بالا به آن نگاه شده ؟



۲) کدام گزینه شکل سمت چپ را کامل می کند ؟



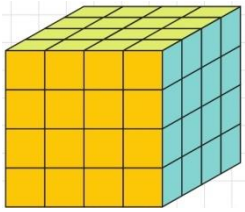


۳) در مکعب مقابل که تمام وجه های آن رنگ شده است .

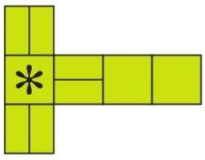
الف) چند مکعب رنگ شده داریم ؟

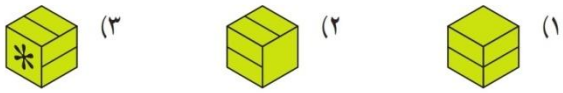
ب) چند مکعب فقط دو وجه رنگ شده دارد ؟

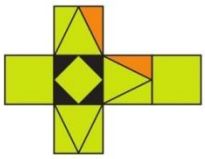
ج) چند مکعب فقط ۳ وجه رنگ شده دارد ؟

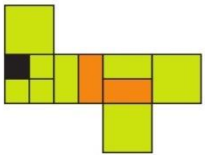


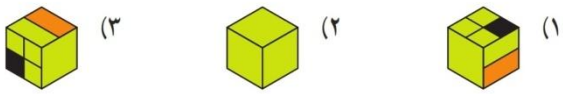
۴) در هر مورد مکعب گسترده سمت چپ مربوط به کدام گزینه است ؟





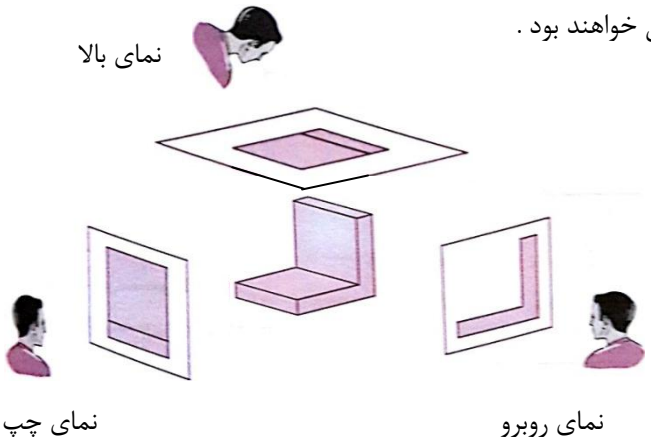




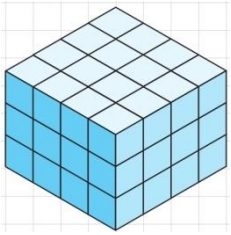


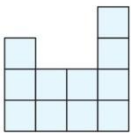
سوال : چه چیزی باعث این خطای دید شده است ؟

نتیجه : با توجه به نمای دید ما اجسام دارای شکل های مختلفی خواهند بود .

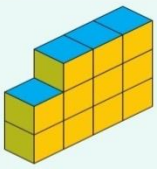
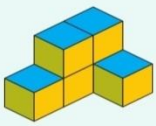
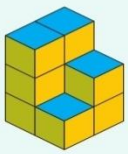


۵) در شکل مقابل حداقل و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به صورت زیر شود .





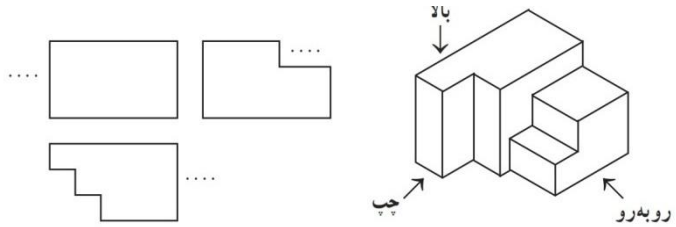
۶) نماهای هر شکل را در مقابل آن درون جدول رسم کنید .

	نمای چپ	نمای بالا	نمای روبه‌رو
			
			
			

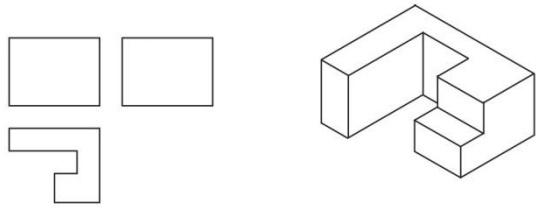
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

۷) سه نمای روبرو و راست و چپ اجسام زیر رسم شده اند . مشخص کنید هر تصویر مربوط به کدام نما است .

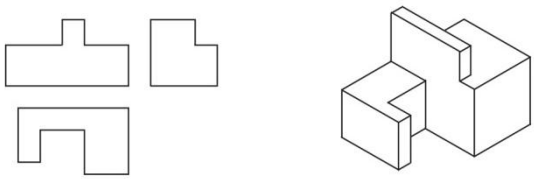
الف)



ب)

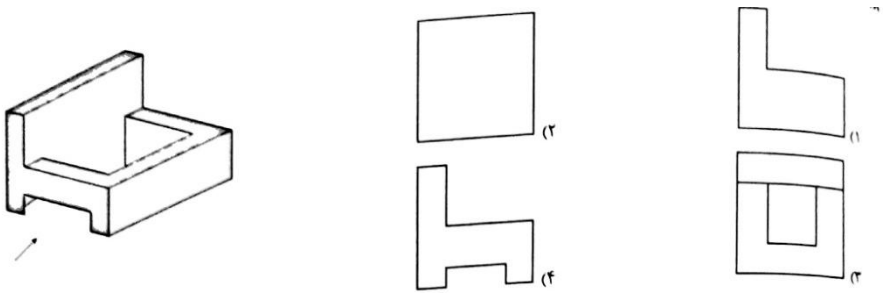


ج)

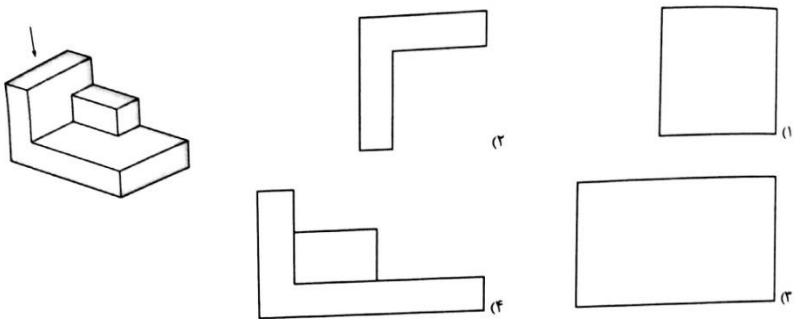


تمرین : .....

۱) نمای چپ شکل مقابل کدام است ؟

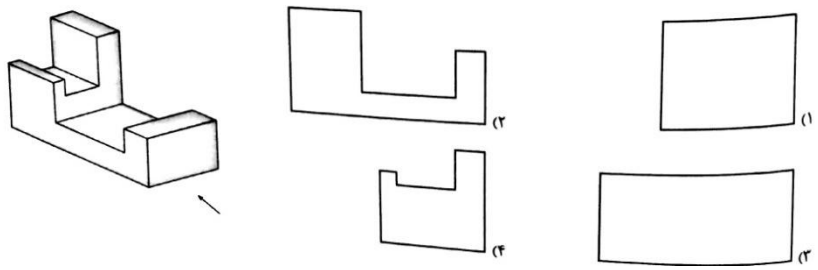


۲) نمای بالای شکل مقابل کدام است ؟

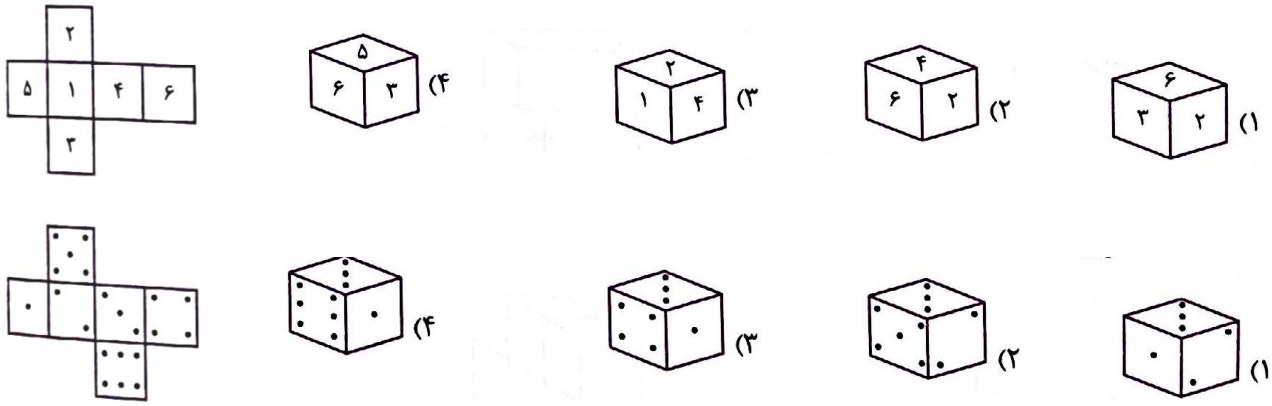


** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

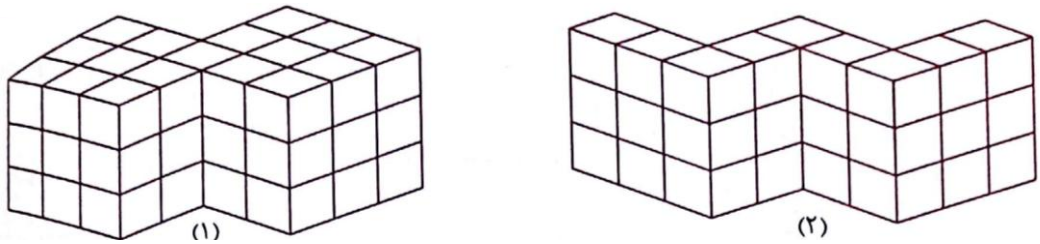
۳) نمای روبروی شکل مقابل کدام است ؟



۴) کدام مکعب مربوط به گسترده مقابل است ؟



۵) چند مکعب کوچک از شکل (۱) برداشته شود تا شکل (۲) بدست بیاید ؟

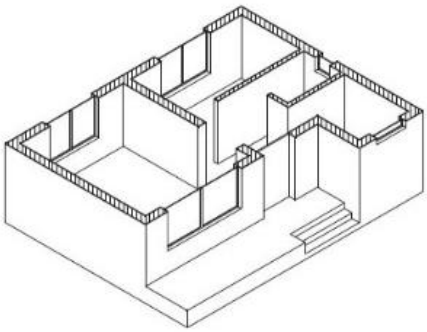


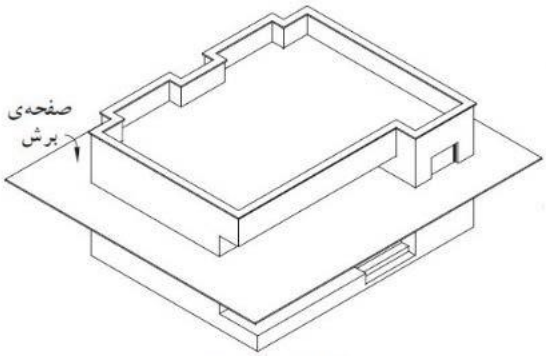
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

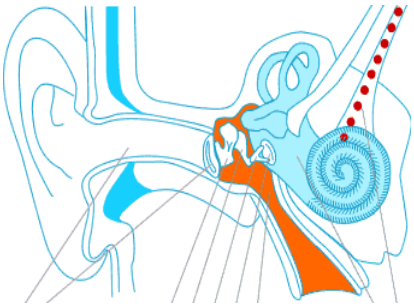
درس سوم : برش

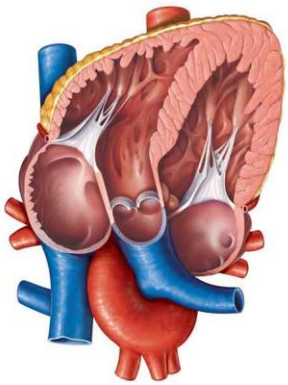
برش یک علم بسیار کاربردی در علوم مکانیک ، معماری ، پزشکی ، زمین شناسی و ..... است .

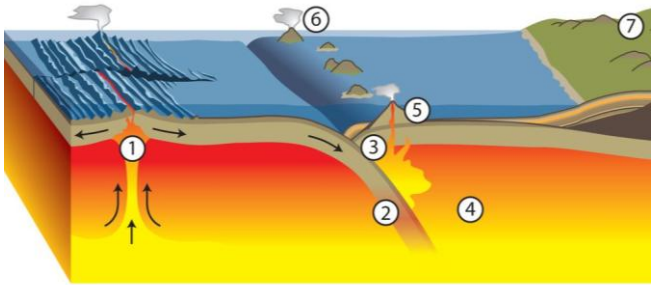
به کمک برش های مختلف می توان درک درست تری از اجسام به دست آورد به عنوان مثال به شکل های زیر که مربوط به علوم مختلف هستند نگاه کنید .









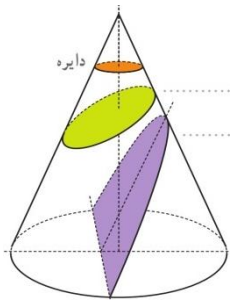


سطح مقطع : شکلی که از برخورد یک صفحه با یک شکل هندسی حاصل می شود را سطح مقطع می نامند.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

سوال : اگر صفحه ای به صوررت افقی ، عمودی یا مایل بر یک کنده برش ایجاد کند . سطح مقطع های ایجاد شده چه شکل هایی خواهند بود ؟

سوال : یک صفحه به صورت های زیر با یک مخروط برخورد می کند . سطح مقطع حاصل چه شکلی است ؟



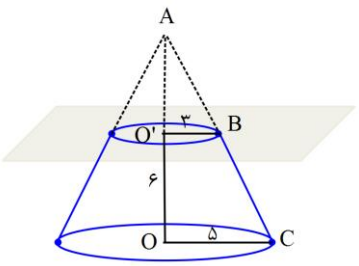
الف) افقی : سطح مقطع ..... است .

ب) مایل به طوری که قاعده را قطع نکند : سطح مقطع ..... است .

ج) مایل به طوری که موازی یال باشد : سطح مقطع ..... است .

سوال : اگر صفحه ای عمودی این دو استوانه را قطع کند چه سطح مقطعی حاصل می شود ؟

سوال : صفحه ای افقی یک مخروط را قطع و یک مخروط ناقص درست کرده است . حجم این مخروط ناقص را بیابید .



سوال : صفحه ای به فاصله h از مرکز کره آن را قطع کرده است . مساحت سطح مقطع چقدر است ؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

سوال : دو دایره با هم برخورد کرده اند . اگر تمام نقاط مشترک آنها را به مرکز یکی از آنها وصل کنیم چه شکلی حاصل می شود ؟

درس سوم : برش

از دوران دادن شکل های هندسی دو بعدی می توان جسم های سه بعدی مختلفی را تجسم کرد .

مثلاً از دوران پاره خط عمود بر یک خط حول آن یک دایره بدست می آید .

مثلاً از دوران نیم دایره حول قطر خوش ، کره بوجود می آید .

سوال : از دوران یک مستطیل ۲ در ۴ حول طول و عرض آن چه شکل هایی ایجاد می شود ؟

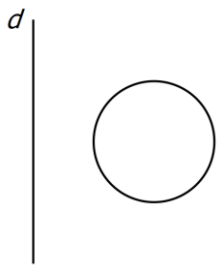
سوال : اگر دو خط متقاطع باشند و یکی حول دیگری دوران کند چه شکلی حاصل می شود ؟

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

سوال : از دوران مثلث متساوی الساقین حول قاعده چه شکلی پدید می آید ؟

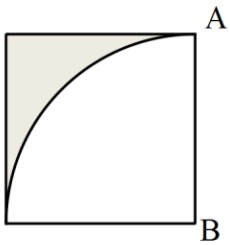
سوال :از دوران ذوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها چه شکلی پدید می آید ؟

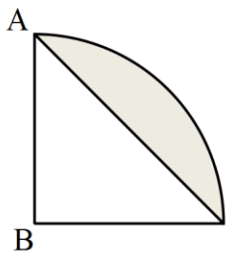
سوال : از دوران دایره حول خط d چه شکلی حاصل می شود ؟



سوال : حجم شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائمه ۳و۴ حول ضلع قائمه کوچکتر را بیابید .

سوال : حجم حاصل از دوران قسمت رنگی هر شکل حول AB چقدر است ؟





پایان

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**